

Genesisio-Tesi Kaotik Sisteminin Parametrik Analizi

¹Deniz DURAL ve ^{*2}Yılmaz UYAROĞLU

1 Sakarya Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Esentepe Kampüsü, Sakarya, Türkiye

^{*2} Sakarya Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Esentepe Kampüsü, Sakarya, Türkiye

Özet

Bu çalışmada Genesisio-Tesi kaotik sistemi incelenmiş ve parametrik analizi yapılmıştır. Öncelikle sistemin modeli kurularak durum değişkenlerin zaman serileri, sinyal spektrumları, korelasyonları ve histogramları elde edilmiştir. Ardından sistemin denge noktaları, bu noktalara ait Jacobian matrisleri ve Lyapunov üstelleri gibi temel dinamik özellikleri incelenmiş ve bütün sayısal benzetim sonuçları gösterilmiştir. Son olarak sistem parametreleri üzerinde değişiklikler yapılarak sistemin dinamik davranışları analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genesisio-Tesi kaotik sistemi, kaos, parametrik analiz

Abstract

In this paper, Genesisio-Tesi chaotic system is investigated and parametric analysis is performed. Firstly, the system is modeled and time-dependence changing of variables, signal spectrums, correlations and histograms are obtained. And then, equilibrium points of the system and basic dynamic properties that are Jacobian matrix and Lyapunov exponents of these points are examined. So, all of the simulation results are shown. Finally, by changing the system's variables, dynamic behavior of the system is analyzed.

Keys: Genesisio-Tesi chaotic system, chaos, parametric analysis.

1.Giriş

Son yıllarda, dinamik lineer olmayan sistemler mühendislik, sosyoloji, biyoloji, meteoroloji ve ekonomi gibi birçok disipline geniş bir bakış açısı sağlamıştır. Bu dinamik lineer olmayan sistemler parametrelere ve başlangıç şartlarına hassas bağımlılık göstermektedir. Bu yüzden sistem parametrelerinin herhangi birinde meydana gelen en ufak değişiklik sistemin davranışında kalıcı değişikliklere neden olmaktadır. Bu durum literatürde kelebek etkisi olarak bilinir [1]. Bu etki karmaşık ve tahmin edilemez davranışlara sebep olduğunda ise, son yılların en popüler alanlarından olan kaos ortaya çıkar. Kaos bir sistemin beklenmedik yani düzensiz davranması olarak tanımlanabilir.

Genesisio-Tesi sistemi ilk olarak 1992 yılında önerilmiştir ve bu kaotik sistemin kontrol ve senkronizasyonu için birçok çalışma yapılmıştır [2]. 2013 yılında Srivastava ve arkadaşları [3], Genesisio-Tesi ve Qi sistemleri gibi iki farklı kaotik sistem arasında adaptif kontrol metodu kullanılarak senkronizasyon yapmış ve bilinmeyen parametreler için Lyapunov denge teoremi kullanmışlardır. Buna benzer olarak, 2007 yılında Park [4], Lyapunov denge teoremi kullanmış, 2010 yılında Ahn ve arkadaşları da LMI (lineer matris eşitsizliği) kullanılarak bu

*Corresponding author: Address: sakarya universitesi esentepe kampüsü M5 binası kat 4 no:5317 Serdivan Sakarya 54000 Turkey. E-mail address: ddural@sakarya.edu.tr, Phone: +902642950000

kaotik sistem üzerinde yeni bir adaptif kontrol şekli ortaya koyarak, pasif tabanlı senkronizasyon konusunu incelemişlerdir [5]. 2012 yılında Guan [6], Genesio-Tesi sistemi üzerinde zaman gecikmeli geri besleme (time delayed feedback) kontrolü uygulayarak, yerel Hopf çatallanmasını incelemiştir. 2005 yılında Jun-Guo [7] kesir dereceli (fractional order) Genesio-Tesi sisteminin kaotik davranışını test etmiştir. Bunun ardından 2012 yılında Faieghi ve Delavari [8], aktif kontrol ve sliding mode kontrol yöntemlerini kullanarak aynı sistemin kaos senkronizasyonunu göstermiştir. 2013'te Tripathi ve Khan [9], kesir derecesinin izleme kontrolü ve kararlılık teorisini kullanmışlardır. Ardından Volta ve Genesio-Tesi sistemleri arasında hibrit izdüşümsel (projective) senkronizasyon tasarımını başarmışlardır. 2007 yılında Park tarafından [10], Genesio-Tesi sistemlerde üstel senkronizasyonda kullanılması için lineer ve lineer olmayan dinamik kontrol kurallarından oluşan 2 bölüme sahip yeni bir geri besleme kontrol tasarımı yapılmıştır. 2009 yılında Shi ve Wang [11], geri adım (back stepping) metodunu kullanılarak Genesio-Tesi ve Lü kaotik sistemleri arasındaki senkronizasyonu incelemiştir. Son olarak da 2012 yılında Gholipour ve arkadaşları [12], geri adım metodu ve CPSO algoritmasını kullanarak, Genesio-Tesi kaotik sisteminin kontrolü için yeni bir kontroller önermişlerdir.

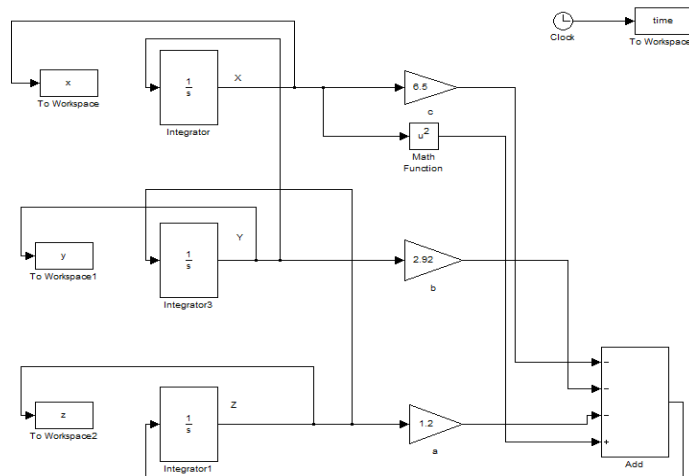
Bu çalışmada Genesio-Tesi sisteminin parametrik analizi yapılmıştır. Çalışmanın geri kalanı şu şekilde devam etmektedir: 2. bölümde Genesio-Tesi sisteminin kaotik analizi yapılmıştır. 3. bölümde parametrelerin sistem üzerindeki etkileri incelenmiştir. 4. bölümde sonuçlar ortaya konulmuştur.

2. Genesio-Tesi Kaotik Sisteminin Analizi

Kaotik bir sistemin başlangıç değerleri ve denklemleri biliniyorsa, o sistemin gelecek davranışları belirlenebilir. Yani kaotik sistemler başlangıç koşullarına hassas bağlıdır. Bu bölümde, sistemin temel özellikleri, dinamikleri ve belirli başlangıç koşulları altındaki davranışları incelenmiştir. Sistemin dinamik denklemleri:

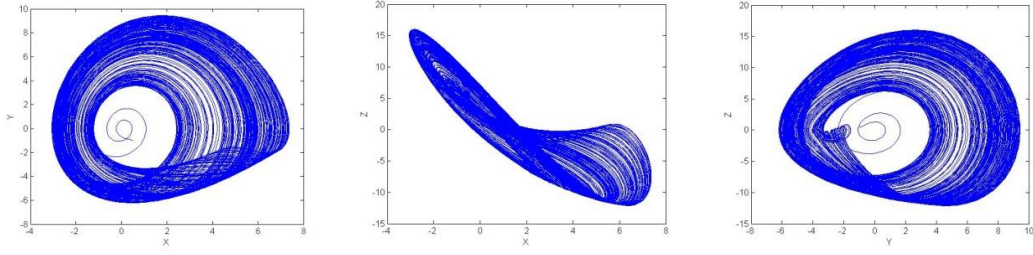
$$\begin{aligned} x &= y, \\ y &= z, \\ z &= -cx - by - az + x^2. \end{aligned} \quad (1)$$

a, b, c parametreleri ve x, y, z durum değişkenleridir. Sistem a=1.2, b=2.92, c=6.5 parametreleri ve $x_0=0.5$, $y_0=-1$, $z_0=0.5$ başlangıç koşulları altında kaotik çekici (attractor) oluşturmaktadır. Sistemin simulink modeli şekil 1 de gösterilmiştir.

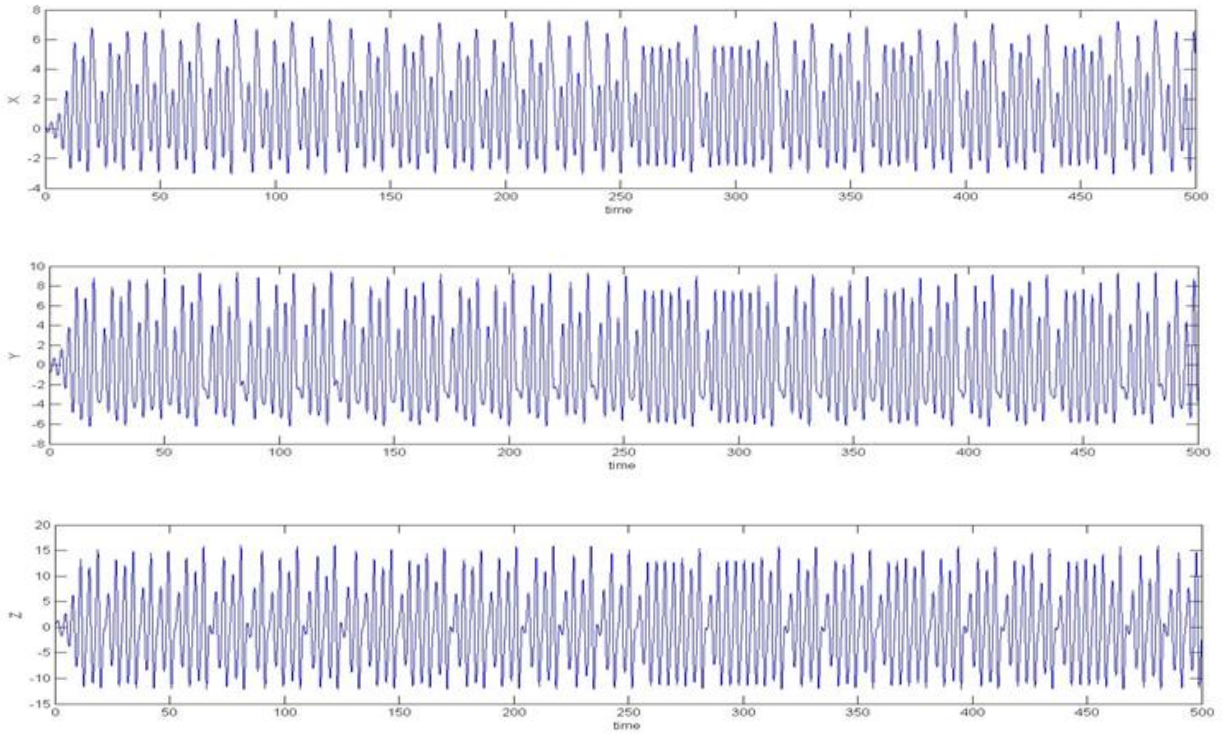


Şekil 1. Genesio-Tesi kaotik sisteminin simulink modeli

Sistemin yukarıda belirtilen başlangıç koşullarına göre ürettiği, x-y, x-z, y-z kaotik faz portreleri ve durum değişkenlerinin zamana bağlı değişimi sırasıyla şekil 2 ve 3 de gösterilmektedir.

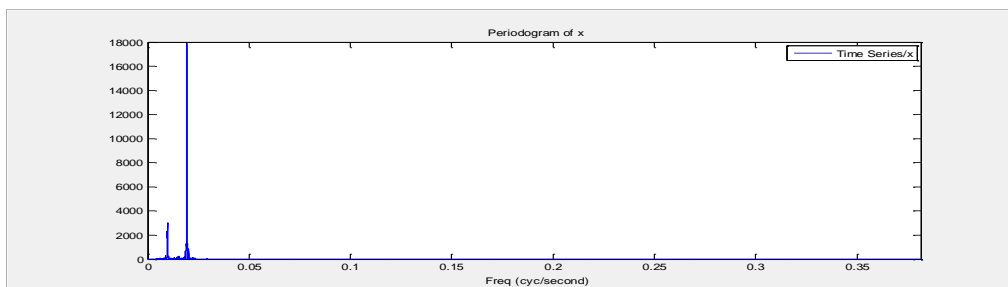


Şekil 2. Sistemin $a=1.2$, $b=2.92$, $c=6.5$ başlangıç koşullarına göre ürettiği faz portreleri



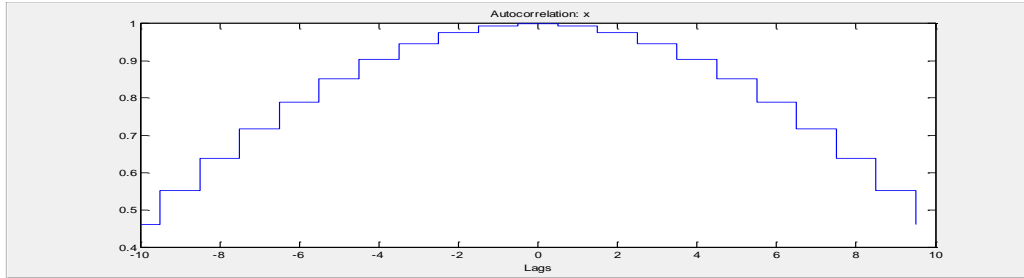
Şekil 3. Durum değişkenlerinin zamana bağlı değişimi

Bir sinyal spektrumu, sinyal bileşenlerinin büyüklüklerine karşılık, bunlara tekabül eden frekansların grafiğidir. Spektral çizim frekans alanının dairesel yapısının incelenmesi için kullanılan bir grafik tekniğidir. x durum değişkeninin spektrumu şekil 4'te gösterilmektedir.



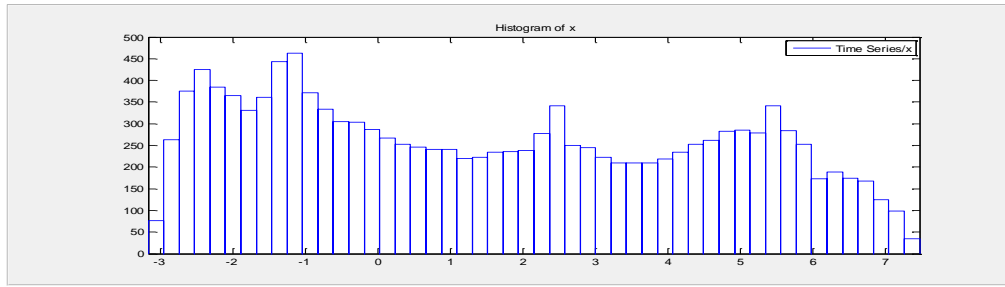
Şekil 4. x durum değişkeninin spektrumu

Korelasyon kavramı sinyal ve sistem analizinde önemli bir rol oynar. Rastgele bir sinyalin oto korelasyon fonksiyonu, belirli bir zamandaki örnek değerlerinin başka bir zamandaki örnek değerlerine genel bağımlılığı olarak tanımlanabilir. Yani, iki farklı örneğin çarpımlarının toplamıdır. x durum değişkeninin korelasyonu şekil 5'te gösterilmektedir.



Şekil 5. x durum değişkeninin korelasyonu

Histogram bir veri setinin dağılımının grafiksel olarak özetlenmesini sağlar. Histogram grafikleri verilerin merkezini, yayılımını, eğimini, aykırı değerlerini veya çeşitli durumlarının gösterilmesine yardımcı olur. Bu özellikler sayesinde verinin homojen dağılıp dağılmadığını gösteren güçlü kanıtlar ortaya koyar. x durum değişkeninin histogramı şekil 6'da gösterilmektedir.



Şekil 6. x durum değişkeninin histogramı

Sistemin (1) denge noktalarının bulmak için, bütün eşitlikler 0'a eşitlenmiştir.

$$0 = \dot{y},$$

$$0 = \dot{z},$$

$$0 = -c\dot{x} - b\dot{y} - a\dot{z} + \dot{x}^2$$

(2)

Eşitlik sistemi \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} için çözümlerse, $E_1(0,0,0)$ ve $E_2(c,0,0)$ olmak üzere 2 adet denge noktası elde edilir. $c=6.5$ olduğundan E_2 denge noktası $E_2(6.5,0,0)$ olmuştur. Bulunan bu denge noktalarının kararlı veya kararsız olup olmadığını anlamak için öz değerleri elde etmek gerekir. En az bir öz değer reel kısmının pozitif olması kaosa ve denge noktasının kararsız olduğuna işarettir. E_1 denge noktası için Jacobian matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c+2x & -b & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6+2x & -2.92 & -1.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -2.92 & -1.2 \end{vmatrix}$$

Öz değerlerin bulunması için $|\lambda I - J| = 0$ eşitliği kullanılır. Böylece, E_1 denge noktasının öz nitelikleri $\lambda_1 = -1.6439$, $\lambda_2 = 0.2220 + 1.8975i$ ve $\lambda_3 = 0.2220 - 1.8975i$ olarak elde edilir. λ_1 negatif reel sayıdır, λ_2 ve λ_3 ise reel kısımları pozitif olan karmaşık sayılardır. Bu nedenle E_1

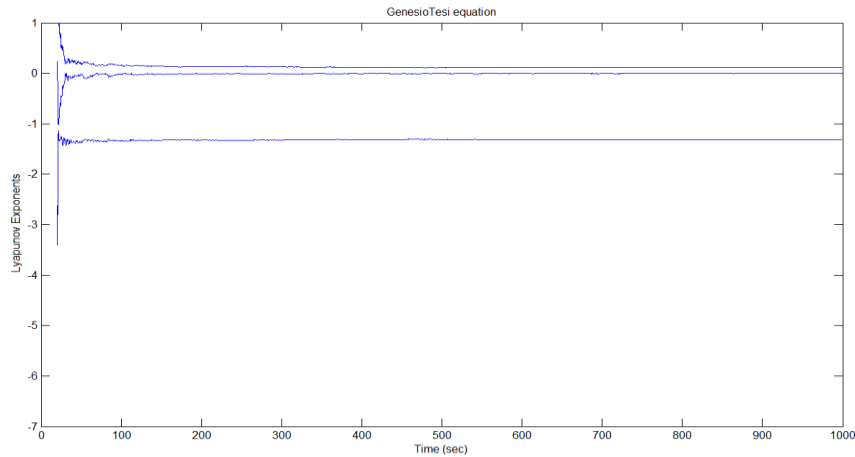
denge noktası saddle-focus point olarak adlandırılır. Ardından E_2 denge noktasını incelersek, Jacobian matrisi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c+2x & -b & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6+2x & -2.92 & -1.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -2.92 & -1.2 \end{vmatrix}$$

Buna karşılık, E_1 denge noktasının öz değerleri $\lambda_1= 1.2039$, $\lambda_2= -1.2020 + 2.0903i$ ve $\lambda_3= -1.2020 - 2.0903i$ olarak bulunur. λ_1 pozitif reel sayı iken, λ_2 ve λ_3 'ün reel kısımları negatif olan karmaşık sayılar olduğu görülmüştür. Sonuç olarak E_1 denge noktası kararsız veya saddle focus point olarak düşünülür.

Lyapunov üstelleri sistemin kaotik bileşenler içerip içermediğini anlamak için kullanılan matematiksel analiz yöntemidir. Eğer sistem en az bir adet pozitif Lyapunov üsteli içerirse, o sistem kaotik olarak ifade edilir [13]. Sistemin analizinden sonra Lyapunov üstelleri $l_1=0.1208$, $l_2=-0.0021639$ ve $l_{i3}=-1.3186$ olarak bulunmuştur. LET sonuçları şekil 7 de gösterilmektedir. Sistemin Lyapunov boyutu da (Kaplan-Yorke boyutu olarak da bilinir) aşağıdaki şekilde hesaplanarak, 2.09 bulunmuştur. Bir sistemin kaotik olduğunu söyleyebilmek için Lyapunov üstellerinin +, -, 0 değerlerine sahip olması ve Kaplan-Yorke boyutunun 2 ile 3 arasında olması beklenmektedir.

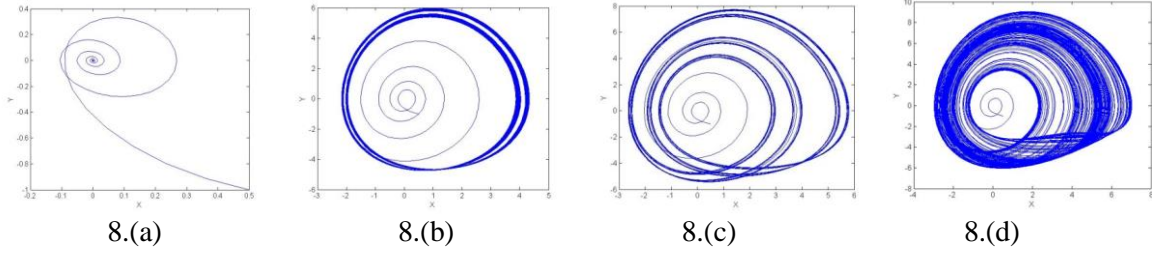
$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j l_i}{|l_{j+1}|} = 2 + \frac{l_1 + l_2}{|l_3|} = 2 + \frac{0.1208 + 0}{|-1.3186|} = 2.09$$



Şekil 7. Genesisio-Tesi sisteminin Lyapunov üstelleri ve zaman grafiği

3. Sistem Parametrelerinin Etkisi

Sistem analizine göre, sistem dengesinin kararlılığı sistem parametrelerinin değişmesiyle değişecektir. Bu sistemin durumunu etkileyecektir. Sayısal benzetim yöntemi sayesinde sistem parametrelerinin etkileri aşağıda analiz edilmiştir. Çalışmada yalnızca 'c' parametresi değişmiş, diğerleri sabit kalmıştır. Şekil 8'de de görüldüğü üzere, $c=2$ değerini aldığı anda sistem sabit noktada kararlı yapıda, $c=5.5$ değerindeyken sistem 2 periyodik, $c=6$ değerini aldığı anda 6 periyodik, $c=6.4$ iken sistemin kaos durumuna girdiği görülmektedir.



Şekil 8. Sistemin(1) x-y düzlemi üzerinde $[0.5 -1 0.5]$ başlangıç değerlerindeki faz portreleri, $(a,b) = (1.2, 2.92)$
 (a) $c=2$, (b) $c=5.5$, (c) $c=6$, (d) $c=6.4$.

Sonuç

Bu çalışmada Genesio-Tesi sisteminin parametrik analizi yapılmıştır. İlk olarak sistemin $x_0=0.5$, $y_0=-1$, $z_0=0.5$ başlangıç koşulları altında Lyapunov üstelleri bulunmuştur. Şekil 7’de de görüldüğü gibi bulunan 3 değer sırasıyla pozitif, sıfır ve negatif değerler almıştır. Bu analiz yöntemine göre üstellerden birinin pozitif değerde olması sistemin kaotik yapıda olduğunu gösterir. Ardından, Kaplan-Yorke boyut metodu kullanılarak sistemin boyutu 2.09 olarak elde edilmiştir ve bu metoda göre kaotik sistemlerde beklenen değer aralığı 2-3 tür. Bu yöntemler, Genesio-Tesi sisteminin kaotik yapıda olduğunu açıkça göstermektedir. Son olarak da, şekil 8’deki görüldüğü gibi, parametrik değişimlerin sistem üzerindeki etkileri incelenmiştir. Buna göre sistemin sabit nokta kararlı yapıdan periyodik yapıya, periyodik yapıdan da en son kaos durumuna geçtiği görülmüştür.

Kaynaklar

- [1] Ogorzalek MJ, Chaos and Complexity in Nonlinear Electronic Circuits, Singapore: World Scientific, 1997.
- [2] R. Genesio, A. Tesi. A harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems, Automatica 28, 1992; 531–548.
- [3] M. Srivastava, S. K. Agrawal, V. Mishra. Adaptive synchronization between different chaotic systems with unknown parameters, International Journal of Applied Information Systems (IJ AIS) ISSN : 2249-0868 ,2013.
- [4] J.H. Park, Adaptive synchronization of Genesio–Tesi chaotic system via a novel feedback control, Physics Letters A, 2007.
- [5] C. K. Ahn, S.T. Jung, S. C. Joo, A passivity based synchronization between two different chaotic systems, International Journal of Physical Sciences, 2010; 5:287-292.
- [6] J. Guan. Bifurcation analysis and chaos control in genesio system with delayed feedback, International Scholarly Research Network ISRN Mathematical Physics, 2012, Article ID 843962, 12 pages.
- [7] L. Jun-Guo. Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order Genesio-Tesi systems, Chinese Physics, 2005; 14:1009-1963.
- [8] M. R. Faieghi, H. Delavari. Chaos in fractional-order Genesio–Tesi system and its synchronization, Communication Nonlinear Science Numerical Simulation, 2012; 731–741.
- [9] P. Tripathi, A. Khan. Hybrid projective synchronization between non-identical fractional order chaotic systems, International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT) 2013; 3:41-49.
- [10] J. H. Park , Exponential synchronization of the Genesio–Tesi chaotic system via a novel feedback control , Physica Scripta , 2007; 76:617–622.

- [11] X. Shi, Z. Wang. Projective synchronization of chaotic systems with different dimensions via backstepping design, *Int. Journal of Nonlinear Science*, 2009; 7:301-306.
- [12] R. Gholipour, A. Khosravi, H. Mojallali, Intelligent back stepping control for Genesio-Tesi chaotic system using a chaotic particle swarm optimization algorithm, *International Journal of Computer and Electrical Engineering*, 2012; 4:618-625.
- [13] M. Sandri, Numerical calculation of Lyapunov exponents, *The Mathematical Journal*, 1996; 6:78-84.