Fark Denklemlerinin Çözümünde Parametrelerin Değişimi Yöntemi

*Hüseyin Kocaman
Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 54187, Sakarya

Özet:

İçerisinde en az birinci mertebeden Δ, ∇, δ, μ, E gibi sonlu farkların bulunduğu fonksiyonel denklemlere Fark Denklemleri denir. Ekonomi, teknoloji, üretim ve tüketim, nüfus artış ve hareketliliği, biyolojide canlı kitle sayısının araştırma ve yorumlanması yaygın kullanım alanlarındandır. Fark Denklemlerinin çözümü konusunda Belirsiz Katsayılar Yöntemi, Operatör Yöntemi, Parametrelerin(Sabitlerin) Değişimi gibi yöntemler kullanılmaktadır. Parametrelerin değişimi yöntemi, genellikle literatürde II. Mertebe denklemlere uygulanmıştır. Bu çalışmada ise, bu yöntemin III. Mertebe denklemlere de başarılı bir şekilde uygulanabileceği gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Fark, denklem, fark denklemleri, parametrelerin değişimi, sabitin değişimi

1. Giriş

Fark denklemlerinin çözümü, pek çok matematikçinin yakın ilgisini çekmiş ve özellikle son 35 yıl içerisinde yapılan çalışmalar sonucunda da bu konuda zengin bir literatür ortaya çıkmıştır [1-6]. Fark Denklemleri, içerisinde en az birinci mertebeden Δ, ∇, δ, μ, E gibi sonlu farkların bulunduğu fonksiyonel denklemler olarak bilinir. Fark denklemleri, ekonomi, teknoloji, üretim ve tüketim, nüfus artış ve hareketliliği, biyolojide canlı kitle sayısının araştırılması ve yorumlanması gibi alanlarda yaygın olarak uygulanır.

Fark Denklemlerinin çözümü konusunda Belirsiz Katsayılar Yöntemi, Operatör Yöntemi, Parametrelerin(Sabitlerin) Değişimi gibi yöntemler kullanılmaktadır. Parametrelerin değişimi yöntemi, yüksek mertebeden ve sabit katsayılı veya değişken katsayılı homojen olmayan denklemlerin bir özel çözümünü bulmak için uygulanabilen en genel yöntemdir. Fakat parametrelerin değişimi yöntemi, genellikle literatürde II. Mertebe denklemlere uygulanmıştır. Bu çalışmada ise, bu yöntemin III. Mertebe denklemlere de başarılı bir şekilde uygulanabileceği gösterilmiştir.

1.1. Sonlu Farklar:

Sonlu farklar, kesikli verilerde fonksiyonun belli değerlere karşı aldığı görüntü ve davranışlarının irdelenmesinde kullanılan araçlardır. Sonlu farklar kullanılarak, sayısal türev, enterpolasyon,

*Corresponding author: Address: Faculty of Science and Art, Department of Maths, Sakarya University, 54187, Sakarya TURKEY. E-mail address: kocaman@sakarya.edu.tr, Phone: +902642955991 Fax: +902642955601

diferansiyel denklemler, fark denklemleri vb. gibi kavramlar tanımlanabilir ve çözümleri yapılabilir.

Örneğin, bir f :IN→ IR fonksiyonu için sonlu farklar aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mathrm{E}\, f(\mathrm{k}) = f(\mathrm{k}+1),$$

$$\mathrm{E}^{-1} f(\mathrm{k}) = f(\mathrm{k}-1)$$

$$\Delta f(\mathrm{k}) = f(\mathrm{k}+1) - f(\mathrm{k}),$$

$$\nabla f(\mathrm{k}) = f(\mathrm{k}) - f(\mathrm{k}-1)$$

$$\delta f(\mathrm{k}) = f\left(\mathrm{k}+\frac{1}{2}\right) - f\left(\mathrm{k}-\frac{1}{2}\right),$$

$$\mu f(\mathrm{k}) = \frac{f\left(\mathrm{k}+\frac{1}{2}\right) + f\left(\mathrm{k}-\frac{1}{2}\right)}{2}$$

1.2. Fark Denklemleri

İçerisinde en az birinci mertebeden Δ, ∇, δ, μ, E, E^{-1} gibi sonlu farkların bulunduğu fonksiyonel denklemlere Fark Denklemleri denir. Ekonomi, teknoloji, üretim ve tüketim, nüfus artış ve hareketliliği, biyolojide canlı kitle sayısının araştırma ve yorumlanması yaygın kullanım alanlarındandır.

n-inci mertebeden sabit katsayılı, lineer, ikinci yanlı fark denklemi,

$$f(\mathrm{k}+\mathrm{n}) + \mathrm{a}_1 f(\mathrm{k}+\mathrm{n}-1) + \ldots + \mathrm{a}_\mathrm{n} f(\mathrm{k}) = g(\mathrm{k}) \quad (\mathrm{a}_\mathrm{n} \neq 0) \tag{1}$$

şeklinde gösterilir. Bu denklemin,

$$f(\mathrm{k}+\mathrm{n}) + \mathrm{a}_1 f(\mathrm{k}+\mathrm{n}-1) + \ldots + \mathrm{a}_\mathrm{n} f(\mathrm{k}) = 0 \tag{2}$$

şeklindeki homojen kısmının,

$$f_\mathrm{h}(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(k) \tag{3}$$

şeklinde bir çözümü vardır.

2. Parametrelerin Değişimi Yöntemi

Parametrelerin değişimi yöntemi, yüksek mertebeden ve sabit katsayılı veya değişken katsayılı homojen olmayan denklemlerin bir özel çözümünü bulmak için uygulanabilen en genel yöntemdir. Bu yöntemin ana yaklaşımı homojen çözümde elde edilen keyfi sabitlerin, başka keyfi sabitler içeren fonksiyoneller olacağı kabulüne dayanır.

Yukarıda verilen ikinci yanlı (1) denkleminin genel çözümünün, aşağıda verilen (4) eşitliğindeki gibi homojen ve özel çözümün toplamı olduğu bilinmektedir.

$$f_{\mathrm{g}}(k) = f_{\mathrm{h}}(k) + f_{\ddot{\mathrm{o}}}(k) \tag{4}$$

Burada özel çözüm veya çözümlerin bulunması problemi ortaya çıkmaktadır. Özel çözümlerin bulunmasında çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu çalışmada parametrelerin(sabitlerin) değişimi yöntemi üzerinde durulacaktır. Bu yöntemin uygulama biçimi genelde ikinci mertebeden denklemler için açıklanmıştır [2,8]. Bu çalışmada n-inci mertebeden ikinci yanlı, sabit katsayılı lineer denklem için genel bir yaklaşım verilecek ve III. mertebeden bir denkleme uygulanacaktır.

(3) formundaki

$$f_{\mathrm{h}}(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, f_i(k)$$

homogen çözümü göz önüne alalım. Eğer ikinci yandaki c_i katsayıları sadece birer sabit iseler homogen kısmın çözümünü sağlarlar. Demek ki bu sabitler, başka sabitleri de içeren bir takım fonksiyoneller ki sağ yandaki fonksiyonu da üretirler. Burada $c_i=c_i(k)$ değişken dönüşümüyle (parametrelerin değişimiyle) özel çözüm,

$$f_{\ddot{o}}(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\, f_i(k) \tag{5}$$

şeklinde bulunur. Bunun için homojen çözüme ileri fark uygulayarak;

$$\begin{aligned}
&\Delta c_1(k)\, f_1(k+1) + \Delta c_2(k)\, f_2(k+1) + \ldots + \Delta c_n(k)\, f_n(k+1) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Delta c_1(k)\, f_1(k+n-1) + \Delta c_2(k)\, f_2(k+n-1) + \ldots + \Delta c_n(k)\, f_n(k+n-1) = 0 \\
&\Delta c_1(k)\, f_1(k+n) + \Delta c_2(k)\, f_2(k+n) + \ldots + \Delta c_n(k)\, f_n(k+n) = g(k)
\end{aligned} \tag{6}$$

denklem sistemi elde edilir [7-8]. Bu sistemden,

$$\Delta c_1(k)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & f_2(k+1) & .... & f_n(k+1) \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & f_2(k+n-1) & .... & f_n(k+n-1) \\ g(k) & f_2(k+n) & .... & f_n(k+n) \end{vmatrix}}{W(k+1)} \qquad \Delta c_2(k)=\frac{\begin{vmatrix} f_1(k+1) & 0 & .... & f_n(k+1) \\ .... & .... & .... & .... \\ f_1(k+n-1) & 0 & .... & f_n(k+n-1) \\ f_1(k+n) & g(k) & .... & f_n(k+n) \end{vmatrix}}{W(k+1)}$$

$$\ldots\ldots \quad \Delta c_n(k)=\frac{\begin{vmatrix} f_1(k+1) & f_2(k+1) & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ f_1(k+n-1) & f_2(k+n-1) & .... & 0 \\ f_1(k+n) & f_2(k+n) & .... & g(k) \end{vmatrix}}{W(k+1)}$$

denklikleri ile $\Delta c_1(k)$, $\Delta c_2(k)$, … , $\Delta c_n(k)$ ileri farkları hesaplanır. Burada, $W(k)$, $f_1(k)$, $f_2(k),\ldots, f_n(k)$ nın Casoratyanı veya Wronskiyenidir [7-8]. Hesaplanan bu sonlu farkların ters fark operatörleri alınarak $c_1(k)$, $c_2(k)$, … , $c_n(k)$ hesaplanıp, (4) denkleminde yerine yazılmakla problemin,

$$f_{ö}(k)=\sum_{i=1}^{n} c_i(k)\, f_i(k)$$

şeklinde özel çözümü ve,

$$f_{\mathrm{g}}(k)= f_{\mathrm{h}}(k)+ f_{\mathrm{ö}}(k) \quad \text{veya} \quad f_{\mathrm{g}}(k)=\sum_{i=1}^{n} c_i\, f_i(k)+\sum_{i=1}^{n} c_i(k)\, f_i(k) \tag{7}$$

şeklinde genel çözüm bulunur. Veya doğrudan,

$$f_g(k)=\sum_{i=1}^{n} c_i(k,C_i)\, f_i(k) \tag{8}$$

genel çözümüne ulaşılır.

3. Sayısal Uygulama

Aşağıda bir örneği verilmiş olan yüksek mertebeli lineer ikinci yanlı fark denklemlerin çözümleri, genellikle belirsiz katsayılar ve operatör yöntemleri kullanılarak yapılır. Burada ise, literatürde pek rastlanmayan, III. ve daha yüksek mertebeli denklemlerin çözümünde parametrelerin değişimi yönteminin uygulanması gösterilecektir.

Problem:

$$f(k+3)-9f(k+2)+26f(k+1)-24f(k)=k$$

Yukarıda verilmiş olan III. mertebeden fark denkleminin çözümüne parametrelerin değişimi yöntemi uygulanacaktır.

Çözüm:

Karakteristik Denklem $\lambda^3-9\lambda^2+26\lambda-24=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=2 \quad \lambda_2=3 \quad \lambda_3=4$

$$f_{\mathrm{h}}(k)=C_1 2^k+C_2 3^k+C_3 4^k \qquad \text{(hom. çözüm)} \tag{9}$$

$$f_{\ddot{\mathrm{o}}}(k)=C_1(k)2^k+C_2(k)3^k+C_3(k)4^k \tag{10}$$

(sbt. değ.) ve ileri farka geçilerek;

$$\begin{aligned}
\Delta c_1(k)2^{k+1}+\Delta c_2(k)3^{k+1}+\Delta c_n(k)4^{k+1}&=0\\
\Delta c_1(k)2^{k+2}+\Delta c_2(k)3^{k+2}+\Delta c_n(k)4^{k+2}&=0\\
\Delta c_1(k)2^{k+3}+\Delta c_2(k)3^{k+3}+\Delta c_n(k)4^{k+3}&=k
\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek

$$\Delta c_1(k)=\frac{k}{4.2^k} \qquad \Delta c_2(k)=-\frac{k}{3.3^k} \qquad \Delta c_3(k)=\frac{k}{8.4^k}$$

ve $$\Delta^{-1}na^n=\sum_{i=0}^{n-1} ia^i=\frac{na^n}{a-1}-\frac{aa^n}{(a-1)^2} \tag{11}$$

eşitliği [7] kullanılarak,

$$\Delta^{-1}\Delta c_1(k) = c_1(k) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{2^i} = -\frac{k+1}{2}2^{-k}$$

$$c_2(k) = \frac{2k+1}{4}3^{-k} \qquad c_3(k) = \frac{-3k-1}{18}4^{-k}$$ fonksiyonları bulunur.

Bu fonksiyonlar (9) eşitliğinde yerine yazılmakla,

$$f_{\text{ö}}(k) = \left(-\frac{k+1}{2}2^{-k}\right)2^k + \left(\frac{2k+1}{4}3^{-k}\right)3^k + \left(\frac{-3k-1}{18}4^{-k}\right)4^k = \frac{-6k-11}{36} \tag{12}$$

elde edilir ve (4), (7) ve (9) eşitliklerinden, $f_{\text{g}}(k) = f_{\text{h}}(k) + f_{\text{ö}}(k)$

$$f_{\text{g}}(k) = f_{\text{h}}(k) + f_{\text{ö}}(k) = C_1 2^k + C_2 3^k + C_3 4^k - \frac{6k+11}{36}$$

elde edilir.

4. Tartışma ve Sonuçlar

Sabit katsayılı lineer yüksek mertebeli ve homojen olmayan fark denklemlerin çözümleri için belirsiz katsayılar, operatör yöntemi ve parametrelerin değişimi yöntemi bilinen ve kullanılan yöntemlerdir. Belirsiz katsayılar ve operatör yöntemleri kısıtlı sayıda ve belli modelleri için kullanılırken parametrelerin değişimi yöntemi hemen tüm modellere uygulanan bir yöntemdir. Diferansiyel denklemlerde yöntem iyi bir integral bilgisi gerektirirken fark denklemlerinde seriler ve özellikleri ile ilgili iyi bir temel bilgi gerektirir.

Bu yöntem, şimdiye kadar II. mertebeden denklemlere uygulanmışken bu çalışmada ise III. mertebeden bir denkleme uygulanması gösterilmiştir. Dolayısıyla, parametrelerin değişimi yöntemi III. ve daha yüksek mertebeden denklemlere uygulanabileceği ispatlanmıştır.

Kaynaklar

[1] Kelley, W.G. and Peterson, A.C. 1991. Difference Equations An Introduction with Applications. Academic, 403, New York

[2] Elaydi, S., An introduction to difference equations. Springer Verlag, New-York, 1999.

[3] Akın, Ö ve Bulgak, H. 1998. Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi, Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi, 180, Konya.

[4] Goldberg, S. 1986. Introduction to Difference equations with Illustrative examples from Economics, Psychology and Sociology. Dover, 260, New York.

[5] Miller, K. S. 1968 . Linear Difference Equations. W. A Benjamin, New York

[6] Mickens, R. 1990. , Difference Equations . Van Nostrand, Reinhold , 448 , New York.

[7] Bereketoğlu, H. Kutay V. , Fark denklemleri, Ankara, 2012.

[8] Türker, E. S., Sayısal analiz yöntemleri, Değişim yayınları, Sakarya, 1998.

[9] Kutay V. , Fark denklemleri, Yüksek lisans tezi, Ankara, 2010.