The Different Adjustment Methods in 3D Coordinate Transformation

[1*]Yasemin ŞİŞMAN
[1]Ondokuz Mayıs Üniversitesi Harita Mühendisliği Bölümü, Samsun, Kurupelit, Türkiye

Abstract:

The absolute values of unknown parameters are calculated by adjustment procedure if the observation number is bigger than the unknown parameter number. The coordinate transformation procedure is the determination of the mathematical relationship between two coordinate systems. This procedure is realized by using the common point coordinates as observation. The common point coordinates contain outlier observation and this observation effect on the solution results. Thus, the observation number is taken bigger than the unknown parameters number to determine the absolute value of coordinate transformation parameters and outlier observation. The mathematical model is formed between observation and unknown parameters and the adjustment procedure is realized according to an objective functions. Although there are a few adjustment methods, Least Square, Least Absolute Values and Total Least Square methods are the most applied in applied sciences. The least square adjustment method is in widespread use, but this method has some disadvantages in the determination of outlier. The least absolute value determines the outlier easily but this method has some disadvantages in the estimation of the unknown parameters. This study firstly, 3D coordinate transformation and the adjustment procedure have been described theoretically. Then, a numerical solution is realized to examine the success of these adjustment methods.

Key words: Adjustment methods, least square method, least absolute values method, total least square method

3D Koordinat Dönüşümünde Farklı Dengeleme Yöntemleri

Özet:

Uygulamalı bilimlerde bilinmeyen sayısından fazla ölçü yapılarak bilinmeyenlerin gerçek değerlerine en yakın uygulama değerleri dengeleme hesabı ile belirlenir. Dengeleme hesabı yöntemleri bilinmeyenler için en uygun parametre kestirimi yaparken, ölçülerde kaçınılmaz olarak var olan uyuşumsuz ölçüleri de belirleyebilmelidir. Dengeleme hesabında bilinmeyen sayısından fazla yapılan ölçü için yazılan matematik modelden en uygun parametre kestirimi bir amaç fonksiyonuna uyularak yapılır. Dengeleme hesabında kullanılan yöntemlerden en çok uygulananlar En Küçük Kareler Yöntemi, En Küçük Mutlak Toplam Yöntemi ve Toplam En Küçük Kareler Yöntemidir. En küçük kareler yöntemi ile çözümün birçok avantajının yanında kaba hatalı ölçülerden çok etkilenmesi ve bir ölçüdeki kaba hatayı diğer ölçülere yayılması gibi dezavantajları da vardır. En Küçük Mutlak Toplam yöntemi ile yapılan çözümde deneme yanılma yoluyla yapılan parametre kestirimi ile elde edilen sonuçlar kaba hatalı ölçülerden daha az etkilenmektedir ve bu yöntem uyuşumsuz ölçülerin ayıklanmasında başarıyla kullanılmaktadır. Bu yöntemlerin yanında son yıllarda Toplam En Küçük Kareler yöntemi kullanılarak dengeleme hesabı yapılmaya başlanmıştır. Bu yöntemde çözüm için kullanılan tasarım matrisinin hatalı olduğu düşünülerek ölçülere ve katsayılar matrisine düzeltme değerleri hesaplanarak parametre kestirimi yapılmaktadır.

Bu çalışmada her üç yöntemin genel açıklamaları yapıldıktan sonra bir uygulamanın verileri kullanılarak yöntemlerin parametre kestirimi ve uyuşumsuz ölçüleri belirlemedeki başarıları bir uygulama verisi kullanılarak belirlenmeye çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dengeleme yöntemleri, En küçük kareler yöntemi, En küçük mutlak toplam yöntemi, Toplam en küçük kareler yöntemi

*Corresponding author: Adres: Mühendislik Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 55139, Samsun TURKİYE. E-mail adres: ysisman@omu.edu.tr, Phone: +903623121919 Fax: +903624576035

1. Giriş

Bir problemde tek anlamlı çözüm yapabilmek için u bilinmeyen sayısının n ölçü sayısının birbirine eşit ya da büyük olması olması gerekir. Bilinmeyen sayısından fazla ölçü yapılan problemlerde $f = n - u$ tane farklı cebirsel çözüm elde edilir. Bu ölçülerden tek anlamlı bilinmeyen parametre değerlerini elde etmek için bir ilkeye göre dengeleme hesabıyla çözüm yapılır. Dengeleme hesabı; gereğinden fazla sayıda yapılmış ölçülerin hiçbirini seçip ayıklamaksızın bilinmeyen parametrelerin en uygun (en büyük olasılıklı) değerlerini belirlemek, ölçülerin kesin değerlerinin ya da bunların fonksiyonlarının duyarlık ve güvenirliğini saptamaktır, [1].

Bir dengeleme yönteminin başarısı; parametre kestirimi ve uyuşumsuz ölçüleri belirleyebilmesi ile analiz edilir. Bir ölçü grubunda çeşitli nedenlerle hata olması ve her ölçünün bir düzeltme değerlerine sahip olması kaçınılmazdır. Bir büyüklüğün doğada var olan gerçek değerinin ve gerçek düzeltmenin bilinememesi gerçek değer yerine kesin değer $\hat{x}$'in ve gerçek düzeltmenin yerine kesin düzeltme v'nin kullanılmasına neden olur,[2].

n tane ℓ ölçüsü ile u tane x bilinmeyen parametresini belirlemek için kurulan matematik model aşağıdaki şekildedir. [3-5].

$$\underline{v} = \underline{A}\underline{x} - \underline{\ell} \qquad \underline{Q}_{\ell\ell} = \underline{P}^{-1}; \quad \underline{C}_{\ell\ell} = \sigma_0^2 \underline{Q}_{\ell\ell} \tag{1}$$

Fazla ölçü içeren bir problemde tek anlamlı çözüm için bir amaç fonksiyonuna göre dengeleme hesabı yapılması gerekir. Bu çalışmada en çok uygulanan parametre kestirim yöntemlerinden En Küçük Kareler Yöntemi, En Küçük Mutlak Toplam Yöntemi ve Toplam En Küçük Kareler Yöntemleri teorik olarak açıklanmıştır. Çalışmanın ikinci bölümünde ise bu yöntemlerin parametre kestirimi ve uyuşumsuz ölçüleri belirlemedeki başarıları 3 boyutlu (3D) benzerlik dönüşümü uygulaması ile bir örnek veri grubu kullanılarak irdelenmiştir.

2. Dengeleme Hesabı Yöntemleri

Dengeleme hesabı ile bilinmeyenlerin gerçek değer olma olasılığı en yüksek olan kesin değerlerini ve dengelenmiş (düzeltilmiş) ölçüleri, bilinmeyenleri ve bunların fonksiyonlarının duyarlıklarını, güvenilirliklerini belirlemektir. (1) eşitliğinden elde edilen matematik modelden bilinmeyen parametrelerin kestirim değerlerini elde etmek için bir amaç fonksiyonuna göre çözüm yapılır.

2.1. En Küçük Kareler Yöntemi

Dengeleme yöntemleri içerisinde kuşkusuz en çok uygulanan yöntem L2-norm yöntemi olarak da bilinen En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY)'dir. Bu yöntemin tercih edilmesinin başlıca nedenleri, hesap algoritmasının basit oluşu, gözlemlerle ilgili istatistik dağılımların bilinmesine gerek duyulmaması, fonksiyonel ve stokastik modellerin başlangıçtaki değerlerini koruması, varyans-kovaryans dağılımı ve hata istatistiği yönünden basit ve anlaşılır olmasıdır, [4].

EKKY'ne göre bir problemin çözümü her zaman tek anlamlıdır ve kolayca gerçekleştirilebilir. EKKY'nin amaç fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\|Pvv\| = [Pvv] = \min \tag{2}$$

EKKY'ni kullanabilmek için ölçü grubunun dağılımı ile ilgili herhangi bir bilgiye ihtiyaç duyulmamaktadır, [6]. Ağırlık matrisi ölçülerin varyans-kovaryans matrisinin tersi olarak alınırsa en küçük kareler yöntemi ile yapılan çözüm minimum varyanslı ve yansız kestirim özelliklerine sahip olur, [7]. (1) eşitliğine göre kurulan genişletilmiş matematik model EKKY'nin amaç fonksiyonuna göre çözülürek bilinmeyenler aşağıdaki eşitlikle elde edilir.

$$\mathrm{x} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{PA})^{-1}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}\ell) \tag{3}$$

Ölçülerin normal dağılımda olduğunun varsayılan EKKY ile çözümde kurulan matematik model gereği; çözüm sonucunda elde edilen düzeltmeler fonksiyonel modele bağlı olarak tüm ölçülerin hatalarından etkilenirler. Ölçü grubunun hatalı ölçü içermesi durumunda ölçülerin dağılımı normal dağılıma uymaz. EKK yöntemi ile çözümde tüm ölçüler parametre kestirimine katıldığı için ölçü kümesinde tek bir uyuşumsuz ölçü bile EKKY ile kestirilen tüm bilinmeyen parametrelerin doğruluğunu ve duyarlığını bozar ve çözüm gereği bu uyuşumsuz ölçünün etkisi tüm diğer ölçülerin düzeltmeleri üstüne yayar. Bu nedenle, EKKY ile yapılan çözüm sonuçlarından uyuşumsuz ölçülerin belirlemesi doğru bir şekilde yapılamayabilir. Bu şekilde yapılan çözümde, uyuşumlu bir ölçü yanlışlıkla uyuşumsuz olarak belirleniyorsa buna da batma etkisi, benzer şekilde uyuşumsuz bir ölçü, uyuşumsuz olarak belirlenemiyorsa buna da gizleme etkisi adı verilir, [8].

2.2. En Küçük Mutlak Toplam Yöntemi

L1-norm olarak da bilinen En Küçük Mutlak Toplam Yöntemi (EKMTY) oldukça eski bir yöntemdir. Bu yöntemin ilk yazılı çözümüm 1789 yılında Laplace tarafından verilmiştir. Zaman içerisinde yöntem birçok farklı problemin çözümünde kullanılmıştır [9-17]. EKMTY düzeltmelerin mutlak değerlerinin ağırlıklı toplamını minimim yaparak bilinmeyen parametrelerin kestirim değerlerini belirleyen yöntemi olarak da bilinen bu yönteminin amaç fonksiyonu,

$$\|pv\| = [P|v|] = \min . \tag{4}$$

olarak verilir. EKMTY de EKKY gibi yansız bir kestirimdir, [18].

EKMTY'nde matematik model (1) eşitliğindeki gibi yazılır ve bu model yöntemin amaç fonksiyonu ile çözülür. u bilinmeyenli n denklemden oluşan (n>u) bir lineer denklem sisteminden EKMTY ile çözümü için her defasında farklı u adet ölçü kullanılarak çözümü yapılabilir. Bu yöntemin genel çözüm için problem lineer programlamaya dönüştürülür, [19]. Lineer programlama bütün bilinmeyenleri pozitif olan denklem sistemlerinin kısıt denklemlerine ve amaç fonksiyonuna göre çözümü yapar. Bu kısıt denklemleri ve amaç fonksiyonu,

$$\begin{aligned} &Cx = d && \text{Kısıt denklemleri} \\ &f = b^{T} x = \min . && \text{Amaç fonksiyonu} \end{aligned} \tag{5}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda (1) eşitliğine göre yazılan matematik modelin lineer programlama eşitlikleri şekline dönüştürülmesi gerekmektedir. EKMTY'nin lineer programlamayla çözümünde bilinmeyen vektörü pozitif, x bilinmeyen parametreleri ve v ölçü düzeltmeleri ile oluşur. Bu nedenle EKMTY'nin bilinmeyen parametreleri pozitif ve negatif olarak türetilen yeni bilinmeyen parametrelerin farkı olarak yeniden düzenlenir, [20]. Bu düzenleme ile EKMTY'nin lineer programlama ile çözümündeki bilinmeyen parametre sayısı x bilinmeyen parametreleri ve v ölçü düzeltmeleri toplamının iki katı olur. Bu düzenlemelerle (1) eşitliğiyle verilen matematik model, (5) eşitliğiyle verilen denklem sisteminin kısıt denklemleri uygulanmış olur. Aynı şekilde L1 norm yönteminin amaç fonksiyonunun lineer programlamanın amaç fonksiyonuna dönüştürülmesi gerekir.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A & -A & -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{+} \\ x^{-} \\ v^{+} \\ v^{-} \end{bmatrix} = \ell \Rightarrow cx = d \\ &f = b^{T} x = \left[p|v| \right] = pT\,v = pT\left[v^{+} - v^{-} \right] = \min . \quad \Rightarrow b^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p & p \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x^{+} \\ x^{-} \\ v^{+} \\ v^{-} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

Böylece (1) eşitliğiyle yazılan matematik model EKMTY'nin amaç fonksiyonuna göre lineer programlama esaslarına göre çözülerek bilinmeyen parametrelerin kestirim değerleri hesaplanabilir. EKMTY ile parametre kestiriminde yalnızca bilinmeyen sayısı kadar ölçüden yararlanılır ve bu ölçülerin hatasız olduğu varsayılarak çözüm yapıldığı için bu ölçülerin düzeltmeleri sıfır olur. Bu durum yöntemin olumsuz tarafıdır. Bu yöntemde parametre kestiriminde her ölçünün düzeltmesi büyük bir oranda kendi hata değeri ile oluşur. Yani bir ölçüdeki hata diğer ölçülere çok daha az yayılır. Bu nedenle EKMTY yöntemi genellikle kaba hatalı gözlemlerin ayıklanmasında kullanılmaktadır, [21].

2.2. Toplam En Küçük Kareler Yöntemi

Toplam En Küçük Kareler yöntemi (TEKKY) ise son yıllarda parametre kestiriminde kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöntem ilk olarak Golub ve Van Loan tarafından açıklanmıştır ve sonraki yıllarda bu yöntemi kullanarak çeşitli araştırmalar yapılmıştır, [22-27]. Bir problemin çözümünde matematiksel model için oluşturan A katsayılar matrisinin hata içermediği düşünülür. Ölçülerde kaçınılmaz olarak var olan hatalarla elde edilen katsayılar matrisinin de hatasız olduğu kabulü doğru bir yaklaşım değildir. Bu durumda A matrisinde oluşacak hatalar dikkate alınarak çözüm yapılmalıdır. 1980 yılında Golub ve Van Loan tarafından ortaya atılan klasik TEKKY'nin matematik modeli şu şekilde verilir.

$$\hat{\ell} = \ell + \underline{v} = \left(\underline{A} - \underline{v}_{\underline{A}}\right)\underline{x} \tag{7}$$

Burada $\underline{v}_{\underline{A}}$; A matrisinin ilgili elemanlarının düzeltme matrisi, $\underline{v}$ ölçülerin düzeltme vektörüdür. Çözümde ölçülerin düzeltme vektörü $\underline{v}$, katsayılar matrisinin düzeltme matrisi $\underline{v}_{\underline{A}}$'nın aynı varyansa sahip sıfır ortalamalı bağımsız değişkenler olduğu düşünülür, [26].
Bu problemin genel çözümünde A matrisinin tüm elemanlarının hatalı olduğu düşünülerek çözüm yapılmasına rağmen uygulamada bu matrisin bir bölümünün sabit katsayılarla oluştuğu durumla sıklıkla karşılaşılır. Sabit katsayılı bölümlerle yapılan TEKKY çözümünde bu katsayıların indirgenmemesi gerektiği için sabit katsayılı bilinmeyenlerin diğer bilinmeyenlerden ayrılması gerekir. Bu durumda A katsayılar matrisi; x_1 sabit katsayılı bilinmeyenler için n, m_1 boyutlu A_1 katsayılar matrisi, x_2 diğer bilinmeyenler için n, m_2 boyutlu A_2 katsayılar matrisi olarak bölünür. A_1 matrisinin değerleri sabit terimlerdir ve kesin olarak biliniyordur. TEKKY'ne göre fonksiyonel model ve amaç fonksiyonu,

$$\begin{aligned} &\underline{\ell} + \underline{v} = \left[A_1; A_2 + v_{A_2}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &\left\| P\left[v; v_{A_2}\right]P \right\| = \min . \end{aligned} \tag{8}$$

eşitlikleri ile verilir. Bu eşitlikleri TEKKY ile çözebilmek için; A katsayılar matrisinin ℓ ölçüleri ile genişletilmesi ile elde edilen sabit katsayılı $\left[A_1; A_2; \ell\right]$ matrisini QR faktörizasyonu ile $\mathrm{Q^T Q} = \mathrm{I}$ özellikli Q kare matris ve R üst üçgen matris olacak şekilde ayrılır. Bu ayrımın amacı sabit kalması gereken bilinmeyenleri diğer bilinmeyenlerden ayırmaktır.

$$\left[A_1; A_2; \ell\right] = QR \text{ yada } Q^T\left[A_1; A_2; \ell\right] = R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{1b} \\ 0 & R_{22} & R_{2b} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Bu şekilde oluşan matrisin ikinci satırı için;

$$\left[R_{22}; R_{2b}\right]P\left(P^{-1}\begin{bmatrix} x_2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \approx 0 \tag{10}$$

yazılabilir. Karesel olmayan lineer bağımlı $\left[R_{22}; R_{2b}\right]P$ matrisinin tersinin alınabilmesi için Singular Value Decomposition (SVD) yapılır ve bu matris $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \Sigma$ matrislerine ayrılır. Bu durumda Σ matrisinin köşegen elemanları $\sigma_m > \sigma_{m+1}$ ve $v_{m+1,m+1} \neq 0$ olur. TEKKY ile lineer bağımlı $\left[R_{22}; R_{2b}\right]P$ matrisin tersinin alınarak x_2 hesaplanırken $v_{m+1} = -1$ yapılmalıdır. [25] (10) eşitliğindeki x_2 ve x_1 bilinmeyenleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\underline{x}_2 = -\frac{1}{C_{m_2+1} V_{m_2+1,m_2+1}} C_{1..m_2} \left[V_{1,m_2+1}, V_{2,m_2+1}, \ldots\ldots, V_{m,m_2+1} \right]$$
$$\underline{x}_1 = R_{11}^{-1} \left(R_{1b} - R_{12} \underline{x}_2 \right) \qquad (11)$$

EKKY yönteminin en genel çözümü ℓ ölçü değerlerinin ve A matrisinin hatalı olarak ele alınması yani TEKK yöntemi çözümüdür [27]. Ölçü grubunda bulunan ölçü hatalarının tasarım matrisini etkilememesi mümkün değildir. Ölçü grubundaki hataların daha iyi modellenmesi ile bilinmeyen parametreler daha kestirilebilir.

3. Sayısal uygulama

EKKY, EKMTY ve TEKKY ile dengeleme sonuçlarını inceleyebilmek için 3 boyutlu koordinat dönüşümü uygulaması yapılmıştır. Bu uygulamada yöntemlerin parametre kestiriminde ve uyuşumsuz ölçüleri belirlemedeki başarıları analiz edilmiştir. Bu uygulamada iki koordinat sisteminde koordinatları bilinen 5 nokta arasında 3 boyutlu dönüşüm eşitlikleri yazılmış ve bu eşitliklerin çözümünden koordinat dönüşümü bilinmeyen parametreleri bulunmuştur. I. sistemdeki koordinat verilerinden 2 nolu noktanın X ve Y koordinatı 1m. artırılmış, 3 nolu noktanın Y değeri ve 5 nolu noktanın Z değeri 1m. azaltılmış kirletilmiş ve 3D koordinat dönüşümü yöntemlerin uyuşumsuz ölçüleri belirlemedeki başarılarının irdelenebilmesi için tekrarlanmıştır. Her iki uygulama için parametre kestirim sonuçları elde edilmiştir. Aynı uygulama 105 nolu noktanın X'ine 1 m., 108 nolu noktanın Y'sine 1 m., 126 nolu noktanın Z'sine 2m. eklenerek tekrarlanmış ve parameter değerleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Bilinmeyen parametrelerin kestirim değerleri

Parametre	EKK Yöntemi	EKMT Yöntemi	TEKK Yöntemi	EKK Yöntemi	EKMT Yöntemi	TEKK Yöntemi
X0	-49.911011	-1736.254686	-50.3652549	-20.936829	8.335016	-18.0857813
Y0	-197.788086	-216.989230	-201.742996	-51.067383	-223.877324	-25.1298324
Z0	107.028705	117.385486	105.9341454	392.114498	79.128307	391.2543562
εx	0.00001778	0.00002249	0.00001764	0.00006597	0.00000999	0.00006586
εy	0.00001801	2.78299740	-0.00001895	-0.00012567	0.00000193	0.00012492
εz	0.00000590	-0.00006865	0.00000590	0.00000280	-0.00000738	0.00000281
κ	1.00000368	1.00000659	1.00000455	0.99997095	1.00000806	0.99996523

4. Tartışma ve Sonuçlar

Dengeleme hesabı yöntemlerinin parametre kestirimi ve uyuşumsuz ölçüleri belirlemedeki başarılarının irdelenmesinin yapılabilmesi için 3D koordinat dönüşümü yapılmıştır. Gerçek bir uygulamadan alınan verilerle önce parametre kestirimi yapılmıştır. Yapılan bu işlemde EKKY ve TEKKY'lerinin parametre değerlerinin birbirine yakın değerler aldığı, EKMTY'nin ise farklı sonuçlar verdiği görülmüştür.

Parametre kestiriminde tüm ölçülerin aynı oranda çözüme katılmalıdır. EKMTY'nde elde edilebilecek $(n-u)$ adet çözümden amaç fonksiyonunu sağlayan bir tanesine göre parametre kestirim değeri elde edilir. Bu çözümde kullanılan ölçüler hatasız kabul edilir ve bu ölçülere düzeltme hesaplanmaz. Bu durumda hata teorisine aykırıdır. Bu nedenle parametre kestiriminde EKMTY ile yapılan çözüm parametre kestiriminde kullanılan ölçülerde hata varsa kestirim değerleri doğru hesaplanamaz. EKKY ve TEKKY'nde ölçülerin tümü aynı oranda çözüme katılır ve her ölçüye düzeltme değeri hesaplanır. Bu durumda hesaplanan parametre değerleri daha anlamlı olur.

Elde edilen parametre değerleri kullanılarak I.sistem koordinatları II. Sistem koordinatlarına dönüştürülmüş ve hesaplanan değerle ölçülen değer arasındaki fark düzeltme değeri olarak alınmıştır. Bu fark değerleri Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. 3D koordinat dönüşümünün düzeltme değerleri

NN	EKK Yöntemi			EKMT Yöntemi			TEKK Yöntemi		
	v_x	v_y	v_z	v_x	v_y	v_z	v_x	v_y	v_z
101	-0.151	-0.130	0.049	-0.023	0.071	-0.041	-0.157	-0.126	0.051
105	0.069	0.033	-0.023	0.206	-0.040	-0.055	0.067	0.028	-0.021
106	-0.100	0.066	0.069	0.000	0.000	0.000	-0.098	0.064	0.068
108	-0.023	0.071	-0.041	0.000	0.000	0.000	-0.016	0.073	-0.046
126	0.206	-0.040	-0.055	0.278	-0.037	-0.034	0.204	-0.038	-0.052

Aynı uygulama 105 nolu noktanın X'ine 1 m., 108 nolu noktanın Y'sine 1 m., 126 nolu noktanın Z'sine 2m. eklenerek tekrarlanmış ve Tablo 3'de verilen düzeltme değerleri elde edilmiştir.

Tablo 3. Kirletilmiş koordinatlarla 3D koordinat dönüşümünün düzeltme değerleri

NN	EKK Yöntemi			EKMT Yöntemi			TEKK Yöntemi		
	v_x	v_y	v_z	v_x	v_y	v_z	v_x	v_y	v_z
101	-0.432	-0.499	-0.758	-0.147	-0.129	0.000	-0.398	-0.528	-0.766
105	**0.799**	0.013	-0.457	**1.218**	0.000	-0.168	**0.813**	0.044	-0.466
106	-0.242	-0.047	-0.030	0.000	0.000	0.000	-0.256	-0.033	-0.042
108	0.002	**0.803**	0.282	0.000	**0.963**	0.000	-0.043	**0.792**	0.265
126	-0.128	-0.269	**1.015**	0.275	0.000	**1.830**	-0.116	-0.275	**1.008**

Yapılan bu irdeleme ve değerlendirme sonucunda dengeleme hesabı yöntemleri değerlendirildiğinde; parametre kestirimi için ölçülerin tümünün aynı oranda çözüme katıldığı ve tasarım matrisindeki hataları da belirleyebildiği için TEKKY'nin kullanılması önerilmektedir. Bunun yanında ölçülerde kaçınılmaz olarak var olan hataların belirlenmesinde diğer yöntemlerden oldukça farklı sonuç veren EKMTY önerilmektedir. Bu durumda; ilk olarak EKMTY'ne göre dengeleme hesabı yapılarak uyuşumsuz ölçülerin belirlenmeli ve bu ölçüler ölçü grubunda çıkarılmalıdır. Sonra uyuşumlu ölçülerle TEKKY'ne göre dengeleme hesabı yapılarak parametre kestirim değerleri elde edilmelidir.

Kaynaklar

[1] Wang Y. A rigorous photogrammetric adjustment algorithm based on co-angularity condition. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing; 1992;29(B5): 195-202.
[2] Bektaş S. Dengeleme Hesabı, Ondokuz Mayıs Universitesi yayınları No: 118, ISBN 975-7636-54-1, 208p., Samsun; 2005.
[3] Vanicek P, Wells DE. The Least Squares Approximation, Department of Geodesy and Geomatics Engineering University of New Brunswick, Canada; 1972.
[4] Wolf RP, Ghilani DC. Adjustment Computations Spatial Data Analysis Wiley, New Jersey, Canada; 2006.
[5] Sisman, Y. Parameter estimation and outlier detection with different estimation methods. Scientific Research and Essays 2011; 6(7): 1620-1626,
[6] Koch KR: Parameter estimation and hypothesis testing in linear models, 2nd Ed., Springer, Berlin; 1999.
[7] Simkooei AA. Formulation of L1 Norm Minimization in Gauss-Markov Models. J Surv Eng 2003;129(1):37-43.
[8] Hekimoglu S. The Finite Sample Breakdown Points of the Conventional Iterative Outlier Detection Procedures. J Surv Eng 1997;123(1): 15–31.
[9] Edgeworth FY. On observations relating to several quantities. Hermathena; 1887;6: 279–285.
[10] Edgeworth, FY. On a new method of reducing observations relating to several quantities. Philisophical Magazine; 1888; 25:184–191.
[11] Hawley RW, Gallagher Jr NC. On Edgeworth's method for minimum absolute error linear regression. Transaction on Signal Processing 1994; 42 (8):2045–2054.
[12] Fuchs H. Contribution on the adjustment by minimizing the sum of absolute residuals. Manuscripta Geodetica 1982;7:151-207.
[13] Kampmann G. Zur Ausgleichung freier Netze mit der L1-Norm-Methode, Allg Vermessungs-Nachr 1989; 96:110–118.
[14] Harvey BR, Survey network adjustments by the L1 method. Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry and Surveying 1993; 59: 39-52.
[15] Dodge Y. Statistical Data Analysis Based on the L1-Norm and Related Methods. Elsevier Science Publishers (North-Holland), Amsterdam, The Netherlands; 1987.
[16] Dodge Y, Falconer W. Statistical Data Analysis Based on the L1-Norm and Related Methods. Barika Photography & Productions, New Bedford, Mass, USA; 2002.
[17] Castillo E, Minguez R, Castillo C, Cofino AS. Dealing with the multiplicity of solutions of the $\ell 1$and $\ell\infty$ regression models. European Journal of Operational Research 2008;188, 460–484.
[18] Yetkin M, İnal C. Jeodezik Ağlarda L1 Norm Minimizasyonu: Yükseklik Ağı Örneği. Harita Dergisi 2010:143: 13-18.

[19] Mosteller F, Rulon PJ, Harris TE. Regression using minimum absolute deviations. The American Statistician 1950; 4 (1):14–15.
[20] Schmidt M. Least squares optimization with L1-norm regularization, CS542B Project Report, http://www.scribd.com/ doc/20350117/Least-Squares-Optimization-With-L1-Norm Regularization. 2005.
[21] Bektas S, SiSman Y. The Comparison of L1 and L2-Norm Minimization Methods. Int J Phys Sci 2010;5(11):1721-1727.
[22] Golub HG, Van Loan FC. An analysis of the Total Least Squares problem. SIAM J Numerical Analysis. 1980;17(6):883–893.
[23] Markovsky I, Van Huffel S Kukush A. On the computation of the Multivariate structured total least squares estimator. Numer Linear Algebra Appl.2004;11:591–608.
[24] Van Huffel S. The generalized Total Least Squares problem: formulation, algorithm and properties, in: Numerical Linear Algebra. Digital Signal Processing and Parallel Algorithms, edited by: Golub, G. H. and Dooren, P. V., NATO ASI, Series F, No. 70, Springer, Berlin 1991; 651–660.
[25] Felus Y. Application of Total Least Squares for spatial point process analysis, J Surveying Engineering 2004;130(3): 126–133.
[26] Akyilmaz O.: Total Least Squares solution of coordinate transformation. Survey Review 2007;39::68-80.
[27] Acar M, Özlüdemir MT, Akyilmaz O, Çelik RN, Ayan T. Deformation analysis with Total Least Squares, Natural Hazards and Earth System Sciences 2006; 6, 663–669.