

# Yerel Eğrilikli Karbon Nanotüp İçeren Elastik Ortamdaki Gerilme Dağılımı

<sup>1</sup>Fatma Çoban and <sup>\*2</sup>Reşat Köşker

<sup>1</sup>Yildiz Technical University, Project Support Office, Yıldiz Campus, 34349 Besiktas, Istanbul-Turkey

<sup>\*2</sup>Yildiz Technical University, Department of Mathematical Engineering, Davutpasa Campus, Istanbul-Turkey

## Abstract

In this study, the problem related to the determination of the stress distribution in the infinite elastic body containing a single locally curved carbon nanotube (CNT) is considered. The model “an infinite body containing a single CNT” regards the case where the concentration of nanotubes in the composite is assumed to be low, and the interaction between them is neglected. The investigations are carried out within the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of three-dimensional geometrical nonlinear exact equations of the theory of elasticity. The stress distribution is studied when the body is loaded at infinity by uniformly distributed normal forces with intensity  $p$  acting in the carbon nanotube laying direction. For the solution of considered boundary value problem, an approximate analytical method is developed by using the boundary form perturbation method.

Numerous numerical results related to the stress distribution acting on the interface surface between the CNT and matrix and the effect of the problem parameters on this distribution are presented and discussed.

**Keywords:** Carbon nanotube, stress distribution, geometrical linearity, local curvature

## Özet

Bu çalışmada, sonsuz ortamda düşük yoğunluklu sonsuz uzunluklu yerel eğrilikli tek karbon nanotüp olması durumu ele alınmış ve gerilme dağılımı incelenmiştir. Bu incelemeler parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu kesin geometrik lineer denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca sonsuzda karbon nanotüp yönünde düzgün yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiği ve nanotüp yüzeyine dik kesitlerin yarıçapı nanotüp boyunca değişmeyen daireler olduğu kabul edilmiştir. Uygun sınır-değer problemlerinin çözümü için sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Ele alınan ortamdaki gerilme yayılımına ait çok sayıda sayısal sonuç elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Karbon nanotüp, gerilme yayılımı, geometrik lineer, yerel eğrilik

## 1. Giriş

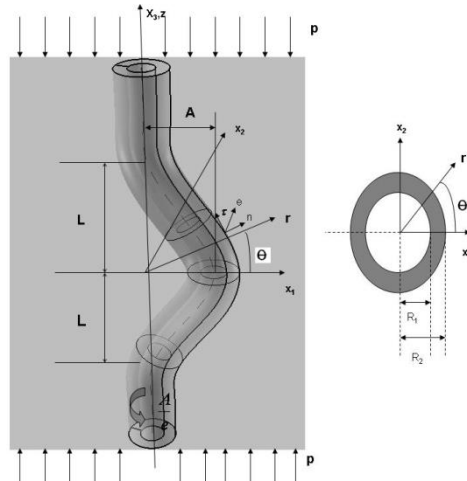
Tek yönlü lifli kompozitlerin en önemli yapısal özelliklerinden biri liflerin eğriliğidir. Başlangıç eğriliğe sahip lifler ve levhalarla güçlendirilmiş kompozitler eğrisel yapıya sahip kompozitler olarak adlandırılır. Genellikle, eğrilikli olarak dizayn edilen kompozit malzemeler periyodik eğrilikli, teknolojik işlemler sırasında oluşan eğrilikler ise yerel eğrilikli kompozitler olarak modellenir. Üretilen kompozit malzemelerin uygulamada başarıyla kullanılması, sözü edilen bu eğriliği hesaba katarak bu malzemedeki gerilme-şekil değiştirme durumunun belirlenmesine de bağlıdır [1]. Ancak tek yönlü lifli kompozit malzemeler geleneksel malzemelerdir. Günümüzde dünya hızla nanoteknoloji konusunda çalışmaya başlamış ve gerekli araştırmaların yapılabilmesi için bu konuda ciddi yatırımlar yapmaktadır. Dolayısıyla, nanokompozit malzemelerin (örneğin nanotüpler) önemi hızla artmaktadır. Bu çalışmada sonsuz ortamda düşük yoğunluklu sonsuz uzunluklu yerel eğrilikli tek bir karbon nanotüp içermesi durumu ele alınmış ve gerilme dağılımı incelenmiştir. Böylece malzemelerde karbon nanotüplerin yerel eğriliğe sahip olması durumu ele alınmış

\*Corresponding author: Yildiz Technical University, Department of Mathematical Engineering, Davutpasa Campus, Istanbul-Turkey, [kosker@yildiz.edu.tr](mailto:kosker@yildiz.edu.tr), Phone: +902123834607

nanokompozit alanında kullanılabilir bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu kesin geometrik nonlineer denklemleri kullanılarak yapılmıştır ve sonsuzda karbon nanotüp yönünde düzgün yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiği ve nanotüp yüzeyine dik kesitlerin yarıçapı nanotüp boyunca değişmeyen daireler olduğu kabul edilmiştir.

## 2. Problemin Formülasyonu

Sonsuz uzunlukta düşük yoğunluklu yerel eğrilikli tek bir karbon nanotüp içeren sonsuz elastik bir ortam ele alalım. Model olarak Şekil 1’de görüldüğü gibi başlangıç küçük yerel eğriliğe sahip tek karbon nanotüp içeren sonsuz bir cisim söz konusudur. Bu cisme sonsuzda nanotüp yönünde düzgün yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiği ve nanotüp yüzeyine dik kesitlerin yarıçapı nanotüp boyunca değişmeyen daireler olduğunu kabul edelim.



**Şekil 1.** İçi boş tek lif içeren sonsuz elastik cismin geometrisi ve seçilen koordinat takımları

Şekil 1’de gösterilen başlangıçlı nanotüpün orta çizgisi üzerinde olan  $Ox_1x_2x_3$  kartezyen,  $Or\theta z$  silindirik koordinat takımlarını seçelim ve bu koordinatların Lagrange koordinatları olduğunu varsayalım. Cismin sonsuzda nanotüp yönünde ( $Ox_3$  ( $Oz$ ) yönünde)  $p$  yoğunluklu düzgün yayılmış normal kuvvetler etkisinde olduğunu düşünelim. Ayrıca nanotüpün orta çizgisine dik olan kesitlerinin  $R_1$  ve  $R_2$  yarıçaplı daireler olduğu ve  $R_1$  ile  $R_2$ ’nin nanotüp boyunca değişmediğini kabul edelim. Nanotüp ve matrisin farklı lineer elastik malzemelerden oluştuğunu varsayıp, sürekli ortamlar mekaniğinin kesin üç boyutlu geometrik nonlineer denklemlerini uygulayarak incelemelerimizi yapalım. Şekil 1’deki cismin geometrisini göz önüne alarak nanotüpün orta çizgisinin denklemini

$$x_1 = F(x_3) = \varepsilon \delta(x_3), \quad x_2 = 0$$

$$x_1 = A \exp\left(-\left(\frac{x_3}{L}\right)^2\right) \cos\left(m \frac{x_3}{L}\right) = \varepsilon L \exp\left(-\left(\frac{x_3}{L}\right)^2\right) \cos\left(m \frac{x_3}{L}\right) = \varepsilon \delta(x_3) \quad \varepsilon = \frac{A}{L} \quad (1)$$

biçiminde ele alalım. Burada  $\varepsilon$ , ( $0 \leq \varepsilon < 1$ ) nanotüpün eğilme genliğini belirten küçük bir parametredir.  $\delta(x_3)$  fonksiyonu ise nanotüpün yüklemmeden önceki eğilmesinin formunu göstermektedir. (1) denkleminde görüldüğü gibi başlangıç yerel eğriliğe sahip nanotüpün orta çizgisi  $x_2=0$  düzlemi üzerindedir. Yüklemeden sonra da nanotüp orta çizgisinin bu düzlem üzerinde kaldığını varsayacağız. (1) ile verilen denklemden ve nanotüp-en kesitinin

sağladığı koşullardan yararlanarak, [2] kaynağında olduğu gibi nanotüp ve matris arayüzeyi olan S'nin denklemini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$r(\theta, t_3) = \frac{\varepsilon \delta(t_3) (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \cos \theta}{1 + (\delta'(t_3))^2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta} + \left\{ \frac{\varepsilon^2 (\delta(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2)^2 \cos \theta}{(1 + (\delta'(t_3))^2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta)^2} + R^2 - (\delta(t_3))^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \right\}^{1/2},$$

$$x_3(\theta, t_3) = t_3 - \varepsilon \delta'(t_3) (r(\theta, t_3) - \varepsilon \delta(t_3)) \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \quad (2)$$

Burada  $t_3$  bir parametredir ve  $t_3 \in (-\infty, +\infty)$  'dir

Bundan sonra matris malzemesi ile ilgili büyüklükleri (1), nanotüp ile ilgili büyüklükleri ise (2) üst indisleriyle göstereceğiz. Bunun dışında gerilme-şekil değiştirme tansörleri ve yer değiştirme vektörünün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri ile bu tansörler ve vektörün fiziksel bileşenlerinden faydalanacağız. Ayrıca tekrarlanan indislere göre Einstein toplam uyuşumu sağlanacaktır fakat altı çizili tekrarlanan indisler için bu uyuşum sağlanmayacaktır. Nanotüp ve matris malzemelerinin her birinde sağlanmak koşuluyla denge denklemleri, şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri ve bünye denklemlerinin sağlandığını varsayalım.

$$\nabla_i \left[ \sigma^{(k)in} \left( g_n^j + \nabla_n u^{(kj)} \right) \right] = 0, \quad k=1,2 \quad (3)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)} \quad (4)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k)} = (\lambda^{(k)} e^{(k)}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k)}) \quad e^{(k)} = \varepsilon_{(11)}^{(k)} + \varepsilon_{(22)}^{(k)} + \varepsilon_{(33)}^{(k)} \quad (5)$$

Burada (5) ile verilen denklemde  $\sigma_{(in)}^{(k)}$  'lar ve  $\varepsilon_{(in)}^{(k)}$  'lar sırasıyla gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenlerini göstermektedir. Aynı zamanda nanotüp ve matris arayüzeyi olan S yüzeyinde ideal temas koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu koşullar aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\sigma^{(1)in} \left( g_n^j + \nabla_n u^{(1j)} \right) \Big|_{S_1} n_j = 0,$$

$$\sigma^{(1)in} \left( g_n^j + \nabla_n u^{(1j)} \right) \Big|_{S_2} n_j = \sigma^{(2)in} \left( g_n^j + \nabla_n u^{(2j)} \right) \Big|_{S_2} n_j, \quad u^{(1)j} \Big|_{S_2} = u^{(2)j} \Big|_{S_2} \quad (6)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (ij) \neq zz \quad (7)$$

Bu şekilde, sonsuz elastik bir ortamda başlangıç küçük yerel eğrilikli sonsuz uzun tek bir nanotüpün olması ve sonsuzda nanotüp yönünde etki gösteren düzgün yayılmış normal kuvvetler olması durumunda gerilmenin araştırılması (3)-(5) denklemler takımının (6) temas koşulları çerçevesinde incelenmesine getirilerek ele alınan problemin matematiksel formülasyonu genel bir biçimde yapılmış olur.

### 3. Çözüm Yöntemi

Formülasyonu yukarıda verilen problem, nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı için verilmiş bir sınır-değer problemidir. Bu problemin incelenmesinde [2] ve [3]' de verilmiş sınır formu pertürbasyon yöntemini uygulayalım. Bu yönteme göre aranan büyüklükler nanotüpün orta çizgisinin denklemine dahil olan ve onun eğilme derecesini gösteren küçük  $\varepsilon$  parametresinin serisi halinde ele alınır.

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, \varepsilon_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \varepsilon_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q u_r^{(k),q} \quad (8)$$

Ayrıca nanotüp-matris arayüzeyi olan S'nin (2) ile verilen denklemleri  $\varepsilon$  cinsinden seri halde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$r=R+\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{rk}(\theta, t_3), \quad z=t_3+\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{zk}(\theta, t_3), \quad (9)$$

(9)'daki ifadelerde yer alan  $\varepsilon^k$ 'lerin katsayıları kolayca elde edilebileceğinden kısalık amacıyla burada verilmemektedir. (8) ifadeleri (3) denkleminde yerine yazılarak (8)'deki her bir yaklaşım için uygun denklemler takımı elde edilir. (5)'deki bünye denklemleri lineer olduğundan (8)'deki her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan bünye denklemleri elde edilir. Birinci ve daha sonraki yaklaşımlar için elde edilen denklemler önceki yaklaşımların büyüklüklerini de içerirler. Bundan başka (6) temas koşullarında (8) ifadelerini yerine yazarak ve (9)'dan yararlanarak (8)'deki  $\varepsilon^k$ 'nin katsayılarını  $(R, \theta, t_3)$  civarında seriye açar ve daha sonra  $\varepsilon$ 'nin aynı derecelerine göre gruplandırırız, her bir yaklaşım için  $r=R_1$  ve  $r=R_2$  yüzeylerinde sağlanan uygun temas koşullarını elde ederiz. Bu işlemler ayrıntılı olarak [2] kaynağında verilmektedir. Şimdi sıfırinci ve birinci yaklaşımlar için elde edilen uygun denklem takımlarının ve temas koşullarının ifadelerini ele alalım.

Sıfırinci yaklaşım için (3)-(5) denklemleri aynen sağlanacaktır. (6) temas koşulları ise  $n_r=1$ ,  $n_\theta=0$ ,  $n_z=0$  oldukları gözönüne alınarak  $r=R_1$  ve  $r=R_2$ 'de aynen sağlanacaktır. Buradan sıfırinci yaklaşım için elde edilen denklem ve temas koşulları nonlineer olur. Sıfırinci yaklaşım, modelimizdeki nanotüpün eğriliksiz düz olması durumunda ortaya çıkan gerilme ve şekil değiştirmelerin belirlenmesi için incelenmesi gereken sınır değer problemidir. İlgili mekaniksel görüşler bu durumda sıfırinci yaklaşım için elde edilen denklemlerdeki nonlineer terimlerin çok önemsiz etkiler vereceğini ifade etmektedir. Bu varsayımın geçerli olması için  $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$  koşulunun sağlandığını kabul ederek  $g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0}$  terimlerini Kronecker sembolleri olan  $\delta_n^j$ 'lerle yer değiştireceğiz. Böylece sıfırinci yaklaşımın temas koşullarını elde ederiz.

Birinci yaklaşım için (8)'i (3) ve (4)'de yerine yazıp  $\varepsilon$ 'nin eşit kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyerek q. yaklaşım için ilgili denklemleri elde edip yukarıda sözü edilen işlemleri (6) ile verilen temas koşulları için uygulayalım.  $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$  olduğu da dikkate alınırsa birinci yaklaşım için aşağıdaki temas koşullarını elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left[ \sigma_{(i)r} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[ \frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[ \frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_r \left[ \sigma_{(i)r} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_\theta \left[ \sigma_{(i)\theta} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_z \left[ \sigma_{(i)z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \\ & \left[ u_{(i)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[ \frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[ \frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Böylece birinci yaklaşımın elde edilmesi için gerekli olan denklemler takımı ve temas koşulları verilmiş olmaktadır.

Şimdi yukarıda formülasyonu verilen sıfırinci ve birinci yaklaşımlara ait sınır değer problemlerinin çözümlerini elde edelim. Sadelik açısından  $v^{(1)}$  matris malzemesinin,  $v^{(2)}$  nanotüp malzemesinin Poisson oranları olmak üzere  $v^{(1)} = v^{(2)}$  olduğunu varsayacağız. Nitekim, [2]'ye göre Poisson oranlarının eşit alınması nümerik sonuçlara önemli bir etkide bulunmamaktadır. Dolayısıyla,  $v^{(1)} = v^{(2)}$  koşulu sadece işlemleri basitleştirmek için

varsayılmıştır. Bu durumda sıfırcı yaklaşım için problemin çözümünü aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^{(1),0} &= \varepsilon_{zz}^{(2),0} = \frac{p}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{zz}^{(1),0} = p, \quad u_z^{(1),0} = u_z^{(2),0} = \frac{p}{E^{(1)}} z, \quad u_r^{(1),0} = -v^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1),0} r, \\ u_r^{(2),0} &= -v^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2),0} r, \quad u_\theta^{(1),0} = u_\theta^{(2),0} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1),0} = \sigma_{rr}^{(2),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(1),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(2),0} = 0, \\ \sigma_{zz}^{(2),0} &= p \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{\theta z}^{(1),0} = \sigma_{\theta z}^{(2),0} = \sigma_{rz}^{(1),0} = \sigma_{rz}^{(2),0} = \sigma_{r\theta}^{(1),0} = \sigma_{r\theta}^{(2),0} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Birinci yaklaşım için (10) temas koşulları

$$\begin{aligned} \left( \sigma_{rr}^{(1),1} - \sigma_{rr}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \left( \sigma_{r\theta}^{(1),1} - \sigma_{r\theta}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} = 0, \quad \left( u_r^{(1),1} - u_r^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} = 0 \\ \left( \sigma_{rz}^{(1),1} - \sigma_{rz}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= \left( \sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta, \quad \left( u_\theta^{(1),1} - u_\theta^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} = 0, \\ \left( u_z^{(1),1} - u_z^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \sigma_{rr}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} = \sigma_{zz}^{(2),0} \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta \end{aligned} \quad (12)$$

haline gelir. Bu denklemlerin çözümü için aşağıdaki gösterilimi kullanalım [4].

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k)}, \quad u_\theta^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k)} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k)}, \\ u_z^{(k)} &= (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left( (\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)}, \\ \Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

(13) denklemlerindeki  $\psi^{(k)}$ ,  $\chi^{(k)}$  fonksiyonları aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$\left( \Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k)} = 0, \quad \left( \Delta_1^{(k)} + (\xi_2^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \Delta_1^{(k)} + (\xi_3^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)} = 0 \quad (14)$$

burada  $\xi_i^{(k)}$  ( $k=1,2$ ;  $i=1,2,3$ ) [5]' de gösterildiği şekilde tanımlanırlar. Birinci yaklaşımla ilgili sınır değer problemini çözmek için bu yaklaşımla ilgili yukarıda verilen denklemlere

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} dz \quad (15)$$

ile verilen üstel Fourier dönüşümünü uygulayacağız. İlgili işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(1),1} &= \bar{A}_1^{(1)}(s) K_1 \left( \xi_1^{(1)} s \frac{r}{L} \right) \sin \theta, \\ \bar{\chi}^{(1),1} &= i \left[ \bar{A}_2^{(1)}(s) K_1 \left( \xi_2^{(1)} s \frac{r}{L} \right) + \bar{A}_3^{(1)}(s) K_1 \left( \xi_3^{(1)} s \frac{r}{L} \right) \right] \cos \theta \\ \bar{\psi}^{(2),1} &= \left[ \bar{A}_{11}^{(2)}(s) I_1 \left( \xi_1^{(2)} s \frac{r}{L} \right) + \bar{A}_{12}^{(2)}(s) K_1 \left( \xi_1^{(2)} s \frac{r}{L} \right) \right] \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\bar{\chi}^{(2),1} = i \left[ \bar{A}_{21}^{(2)}(s) I_1(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{22}^{(2)}(s) K_1(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{31}^{(2)}(s) I_1(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{32}^{(2)}(s) K_1(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L}) \right] \cos \theta \quad (16)$$

elde edilir. Burada  $I_n(x)$  Bessel fonksiyonu ve  $K_n(x)$  Macdonald fonksiyonudur. (16) fonksiyonları birinci yaklaşımın sınır-değer probleminde kullanılır ve böylece ulaşılabilecek lineer denklemler takımı çözümlerse, ulaşılmak istenen gerilmelerin birinci yaklaşımının Fourier dönüşümlü değerlerini hesaplamak için gerekli olan büyüklükler belirlenmiş olur. Bu gerilmelerin gerçek değerlerini elde etmek için ters fourier dönüşümü uygulanır.

#### 4. Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

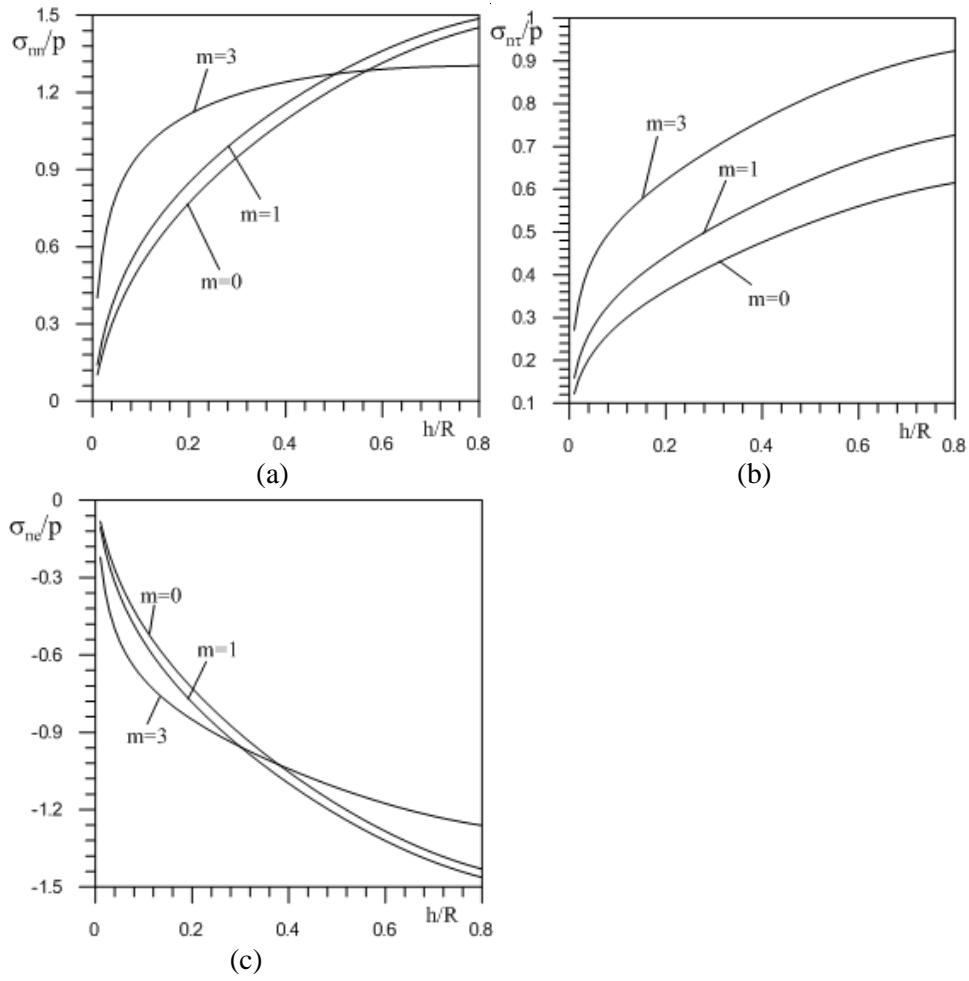
Gerilme yayılımına ait incelemeler  $\sigma_{nr}$ ,  $\sigma_{ne}$  kayma gerilmeleri ve  $\sigma_{nn}$  normal gerilmesine ait sayısal sonuçlar elde etmek ve bunları yorumlama kapsamında yapılmıştır. Bu gerilmeler, matris ve nanotüp arakesit yüzeyi üzerinde  $\mathbf{n}$  normal vektörü ve  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{e}$  teğet vektörleri doğrultusundaki gerilmelerdir. Sayısal sonuçlar için  $h/R$  ve  $R/L$  ( $R=R_2$ ) parametrelerini tanımlayalım ve  $v^{(1)}=v^{(2)}=0.3$ ,  $\varepsilon=0.07$  ve aksi belirtilmedikçe  $E^{(2)}/E^{(1)}=500$  değerlerinin kullanıldığını belirtelim.

Gerilmelerin  $h/R$  parametresine göre değişimini gösteren şekillerde  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{ne}$  için  $\theta=0$ ;  $\sigma_{nr}$  için  $\theta=\pi/2$  değeri kullanılmıştır. Şekil 2 grafiklerinde  $R/L=0.25$ ,  $E^{(2)}/E^{(1)}=500$  değerlerinde sırası ile  $\sigma_{nn}/|p|$ ,  $\sigma_{nr}/|p|$ ,  $\sigma_{ne}/|p|$  ile  $h/R$  parametresi arasındaki ilişki  $m=0,1,3$  değerleri için elde edilmiştir.

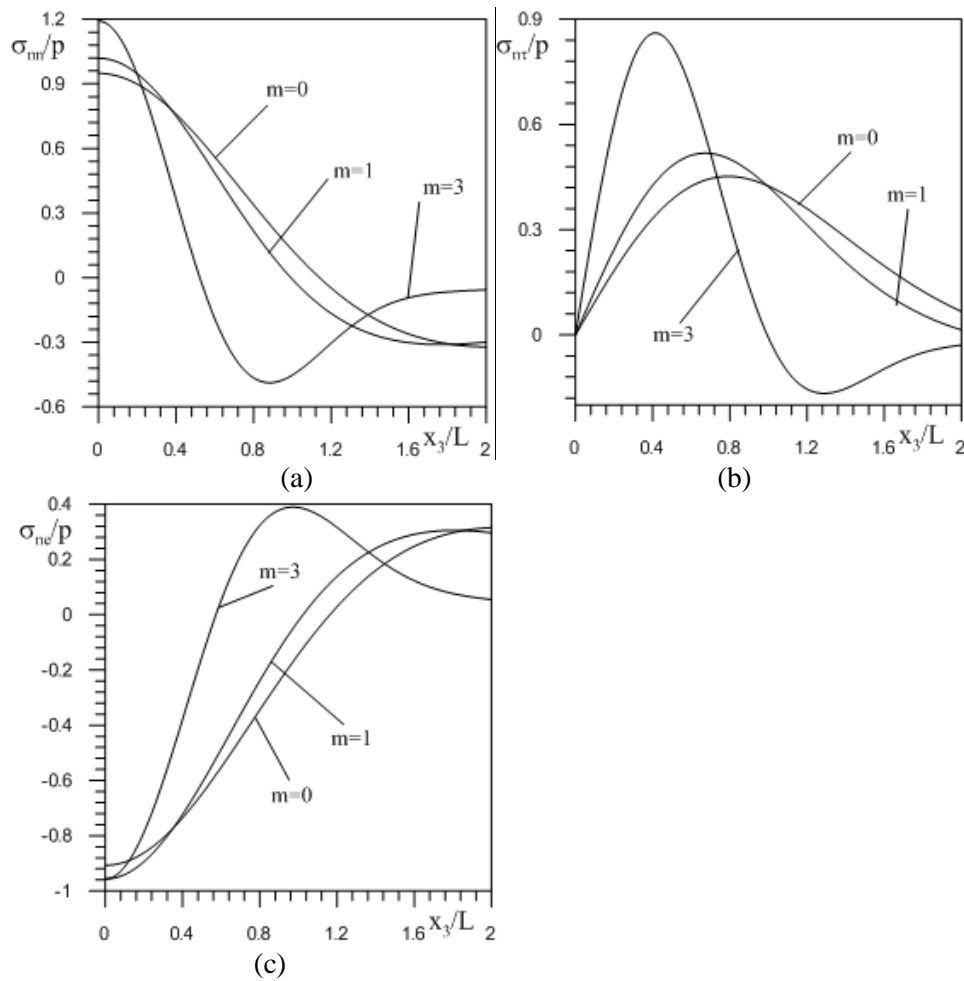
Gerilmelerin  $x_3/L$  parametresine göre değişimini gösteren şekillerde  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{ne}$  için  $\theta=0$ ;  $\sigma_{nr}$  için  $\theta=\pi/2$  değeri kullanılmıştır. Şekil 3 grafiklerinde  $R/L=0.25$ ,  $h/R=0.3$ ,  $E^{(2)}/E^{(1)}=500$  değerlerinde sırası ile  $\sigma_{nn}/|p|$ ,  $\sigma_{nr}/|p|$ ,  $\sigma_{ne}/|p|$  ile  $x_3/L$  parametresi arasındaki ilişki  $m=0,1,3$  değerleri için elde edilmiştir.

Burada nanotüpün kalınlığı  $h/L$  artırıldığında yani nanotüpün içindeki boşluk limit olarak sıfıra götürüldüğünde ve  $E^{(2)}/E^{(1)}$  oranı uygun bir değer seçildiğinde sonsuz elastik ortamda yerel eğrilikli tek lif içeren kompozit malzemede elde edilen gerilme değerleriyle aynı sonuçlar bulunmuştur.

Literatürden nanotüplerin mekanik özelliklerine bakıldığında elastisite sabitleri açısından nanotüpün elastisite sabitinin matris malzemesi elastisite sabitine oranının büyük olduğu görülmektedir. Çalışmada bu oran 500 alınarak asal gerilme ve kayma gerilmeleri incelenmiştir ve bunun sonucunda bu gerilme değerlerinin aynı problemin kompozit malzeme için elde edilen değerlerinden oldukça büyük olduğu tespit edilmiştir. Belirtilmelidirki, verilen yük değerleri stabilite kaybı probleminden elde edilen kritik yük değerlerinden küçüktür. Elde edilen sonuçlar sınır formu pertürbasyon yöntemindeki sıfırıncı ve birinci yaklaşımlar çerçevesindedir. Daha yüksek yaklaşımlar parametrelerin gerilme dağılımındaki etkilerini nitelik olarak değiştirmez ancak nicelik olarak daha hassas sonuçlar verir.



**Şekil 2.**  $m=0,1,3$  için  $\sigma_{nr}/p$  ile  $h/R$  arasındaki bağımlılık (a),  $\sigma_{nr}^1/p$  ile  $h/R$  arasındaki bağımlılık (b),  $\sigma_{nr}^e/p$  ile  $h/R$  arasındaki bağımlılık (c),  $(E^{(2)}/E^{(1)})=500$ ,  $R/L=0.25$ ,  $\varepsilon=0.07$ )



**Şekil 3.**  $m=0,1,3$  için  $\sigma_{nn}/p$  ile  $x_3/L$  arasındaki bağımlılık (a),  $\sigma_{nt}/p$  ile  $x_3/L$  arasındaki bağımlılık (b),  $\sigma_{ne}/p$  ile  $x_3/L$  arasındaki bağımlılık (c), ( $E^{(2)}/E^{(1)}=500$ ,  $R/L=0.25$ ,  $h/R=0.25$ ,  $\varepsilon=0.07$ )

Tablo 1’ de sırası ile  $\sigma_{nn}/p$ ,  $\sigma_{nt}/p$ ,  $\sigma_{ne}/p$  değerleri çeşitli  $m$ ,  $E^{(2)}/E^{(1)}$  parametrelerinde verilmiştir. Bu tabloda gerilme değerlerinin sıfırncı ve birinci yaklaşım sonucunda elde edilen sayısal sonuçları görülmektedir. Bu tablolardan  $E^{(2)}/E^{(1)}$  büyüdükçe değerlerin de mutlak olarak büyüdüğü gözlenmektedir.

**Tablo1.** Çeşitli  $E^{(2)}/E^{(1)}$  ve  $m$  değerleri için  $\sigma_{nn}/p$ ,  $\sigma_{nt}/p$ ,  $\sigma_{ne}/p$ ’ nin birinci yaklaşım değeri

$m$	$E^{(2)}/E^{(1)}$	$\sigma_{nn}$	$\sigma_{nt}$	$\sigma_{ne}$
0	300	0.73006	0,36724	-0.69235
	500	0.94874	0.42407	-0.90687
	1000	1,30137	0.50024	-1,25419
1	300	0.81317	0,45333	-0.75484
	500	1,01949	0.51202	-0.95645
	1000	1,33755	0.58683	-1,26893
3	300	1,08392	0,65439	-0.85479
	500	1,19228	0.69737	-0.95649
	1000	1,3208	0.74182	-1,07899



**Kaynaklar**

- [1] Akbarov, S.D., Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites, Springer, 2012, 465 pp.
- [2] Akbarov, S. D. and Guz, A. N., "Mechanics of Curved Composites", Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [3] Akbarov, S.D., Guz, On the Stressed State in the Fibrous Composite Material with Curved Structures and Low Fiber Concentration, Prikl. Mekh., 1985c, 21(6), 37-44 (in Russian)
- [4] Guz, A.N., Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies, 1999, Springer, 555p.
- [5] Akbarov, S.D., Kosker, R. ve Simsek, K., Stress Distribution in an Elastic Body with a Locally Curved Fiber in a Geometrical Nonlinear Statement, Mechanics of Composite Materials, 2005, Vol 41, No:4, 291-302