Plazma İletiminin Optimal Kontrolü Üzerine

[1]Yalçın Yılmaz, [2]İsmail Küçük ve [3]Faruk Uygul

[*1]Faculty of Arts and Sciences, Dept. of Mathematics, Sakaya University, Sakarya, Turkey
[2]Faculty of Chemical and Metallurgical Engineering, Mathematical Engineering, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey
[3]College of Arts & Sciences, Department of Maths & Stats, American University of Sharjah, Sharjah, UAE

Abstract

An optimal control problem in plasma transport is formulated. The method of solution involves Fourier-sine expansion to transform the original problem into the optimal control of lumped parameter system in time. Next, the time-variant control problem is solved by using a variational approach. A numerical example is given to demonstrate the applicability and the efficiency of the proposed method.

Keywords Optimal control, Plasma transport, Variational approach

Özet

Bu çalışmada bir plazma iletimi için optimal kontrol problemi formüle edilmiştir. Kullanılan çözüm yöntemi orjinal problemi, zamana göre düzenlenmiş parametre sisteminin optimal kontrolüne dönüştüren Fourier sinüs açılımıdır. Zamana göre değişen kontrol probleminin çözümü için varyasyonel yaklaşımdan yararlanılmıştır. Ayrıca verilen yöntemin verimliliği ve uygulanabilirliğini göstermek için sayısal bir örnek ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler Optimal kontrol, Plazma taşınması, Varyasyonel yaklaşım

1. Giriş

Serbest elektronlara sahip iyonize edilmiş gaz olan plazma, özgün özelliklerinden dolayı maddenin farklı hali olarak dikkate alınmaktadır. Plazma taşınması; plazma yoğunluğu, sıcaklık ve akım gibi fiziksel değişkenlerin davranışlarını incelemektedir.

Biz bu çalışmada 1-boyutlu geometriye sahip basitleştirilmiş plazma taşıma modeli ele aldık.

$$\psi_t(x,t) = \psi_{xx}(x,t) + f(x)v(t),\ x\epsilon(0,1),\ t > 0 \tag{1}$$

$$\psi(x,0) = \psi_0(x),\ x\epsilon(0,1) \tag{2}$$

$$\psi_x(0,t) = \psi_x(1,t) = 0,\ t > 0 \tag{3}$$

*Corresponding author: Address: Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, Sakarya University, 54187, Sakarya, Turkey. E-mail: yalciny@sakarya.edu.tr, Phone: +90 264 2955999

başlangıç-değer problemi için tanımladığımız

$$J(v) := \mu_1 ||\psi(x,t_f) - \psi_d(x)||^2 + \mu_2 ||v(t)||^2 \tag{4}$$

fonksiyonelini ele alıyoruz. Burada t_f son zaman noktasını, $\psi(x,t)$ (1)-(3) probleminin çözümünü, $\psi_d(x)$ ise hedef fonksiyonunu tanımlamaktadır. (4) deki ilk terim hedefle son durum arasındaki mesafeyi, ikincisi ise kontrolün enerjisini ifade eder.

$H(S) = L_2(S)$, $H(S) = \{f: \mathbb{R} \supseteq S \to \mathbb{R} | \, ||f||^2 < \infty\}$ olmak üzere iç çarpımın $< f, g >= \int_S f(r)g(r)dr$, normun ise $||f||^2 = < f, f >$; $\forall f, g \in H(S)$ şeklinde tanımlandığı bir Hilbert uzayı olsun. Bu çalışmada optimal kontrol problemi, (4) ile verilen performans index fonksiyonunun

$$J(v^0) = \min_{v \in H(0,t_f)} J(v)$$

olacak şekilde minimize edilmesidir.

2 Kontrol problemi

Fourier-Sinüs açılımı yardımıyla (1)-(3) problemini çözmek için öncelikle

$$\varphi_n(x) := \sqrt{2}\cos(\lambda_n x), \lambda_n = n\pi, \ \ \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

özfonksiyonunu dikkate alalım. Bu durumda $\psi(x,t)$ fonksiyonunun

$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{N} T_n(t)\varphi_n(x)$

şeklinde olduğunu varsayalım. Bu durumda (1) den

$$\sum_{n=1}^{N} T_n'(t)\varphi_n(x) = -\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 T_n(t)\varphi_n(x) + f(x)v(t)$$

yazılır. Biz burada $N = 1$ halini, yani çözümün $\psi(x,t) = T_1(t)\varphi_1(x)$ olması durumunu inceleyeceğiz. $\{\varphi_n(x)\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ fonksiyonlarının ortogonalliğinden

$$T_1'(t) = -\lambda_1^2 T_1(t) + v(t)\int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx$$

veya buna denk olan

$$T_1'(t) = -\lambda_1^2 T_1(t) + v(t)\alpha_1 \tag{5}$$

eşitliği çıkar. $\psi(x,0) = T_1(0)\varphi_1(x) = \psi_0(x)$ başlangıç koşulundan

$$T_1(0) = \int_0^1 \psi_0(x)\varphi_1(x)dx \coloneqq \beta_0$$

elde edilir. (5) lineer denklemi çözülürse

$$T_1(t) = \alpha_1 e^{-\lambda_1^2 t} \int_0^t e^{-\lambda_1^2 s} v(s)ds + \beta_0 e^{-\lambda_1^2 t}$$

ve buradan da $\psi(x,t)$

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= T_1(t)\varphi_1(x)\\ &= \left(\alpha_1 e^{-\lambda_1^2 t} \int_0^t e^{-\lambda_1^2 s} v(s)ds + \beta_0 e^{-\lambda_1^2 t}\right)\varphi_1(x)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (1) denkleminin (2)-(3) başlangıç-sınır koşullarını sağlayan çözümünü elde ederiz. Şimdi $\psi(x,t)$ nin bu değerini $J(v)$ performans index fonksiyonununda yazalım:

$$\begin{aligned}J(v) &= \mu_1 \int_0^1 \left(T_1(t_f)\varphi_1(x) - \psi_d(x)\right)^2 dx + \mu_2 \int_0^{t_f} v^2(t)dt\\ &= \mu_1 \int_0^1 \left(T_1^2(t_f)\, \varphi_1^2(x) - 2T_1(t_f)\varphi_1(x)\, \psi_d(x) + \psi_d^2(x)\right) \quad dx + \mu_2 \int_0^{t_f} v^2(t)dt\\ &= \mu_1 T_1^2(t_f) + \mu_1 \int_0^1 \psi_d^2(x)\, dx - \mu_1 T_1(t_f) \int_0^1 2\varphi_1(x)\, \psi_d(x)dx + \mu_2 \int_0^{t_f} v^2(t)dt.\end{aligned}$$

$J(v)$ nin $v(t)$ kontrol fonksiyonuna göre 1. varyasyonu sıfır olmalıdır. Dolayısıyla aşağıdaki denklem yazılır:

$$\begin{aligned}\delta J|_v &= 2\mu_1 T_1\ (t_f)\delta T_1\ (t_f)|_v - \mu_1\gamma_1\ \delta T_1\ (t_f)|_v + 2\mu_2 \int_0^{t_f} v(t)\delta v(t)dt\\ &= 2\mu_1 \left(\alpha_1 \int_0^{t_f} e^{\lambda_1^2(\tau - t_f)} v(\tau)d\tau + \beta_0 e^{-\lambda_1^2 t_f}\right)\left(\alpha_1 \int_0^{t_f} e^{\lambda_1^2(s-t_f)}\delta v(s)ds\right)\\ &\quad -\mu_1\alpha_1\gamma_1 \int_0^{t_f} e^{\lambda_1^2(s-t_f)}\delta v(s)ds + 2\mu_2 \int_0^{t_f} v(s)\delta v(s)ds\\ &= \int_0^{t_f} \Big\{e^{\lambda_1^2(s-t_f)} \Big[2\mu_1\alpha_1^2 \int_0^{t_f} e^{\lambda_1^2(\tau-t_f)} v(\tau)d\tau + 2\mu_1\alpha_1\beta_0 e^{-\lambda_1^2 t_f} - \mu_1\alpha_1\gamma_1\ \Big] +\\ &\quad 2\mu_2 v(s)\Big\}\, \delta v(s)ds = 0.\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\mu_1\alpha_1^2 e^{\lambda_1^2(s-t_f)} \left(\int_0^{t_f} e^{\lambda_1^2(\tau-t_f)} v(\tau)d\tau\right) +$$

$$\left(\mu_1\alpha_1\beta_0 e^{-\lambda_1^2 t_f} - \frac{\mu_1}{2}\alpha_1\gamma_1\ \right) e^{\lambda_1^2(s-t_f)} + \mu_2 v(s) = 0 \qquad (6)$$

çıkar ki burada, $\xi_0 = \mu_1\alpha_1^2,\ \ c_1 = \int_0^{t_f} e^{\lambda_1^2(\tau-t_f)}v(\tau)d\tau,\ \ \xi_1 = \mu_1\alpha_1\beta_0,\ \xi_2 = \frac{\mu_1}{2}\alpha_1\gamma_1$ sabitleri tanımlanırsa

$$\mu_2 v(s) + (\xi_0 c_1 - \xi_2)e^{\lambda_1^2(s-t_f)} + \xi_1 e^{\lambda_1^2(s-2t_f)} = 0$$

veya

$$v(s) = \frac{\xi_2-\xi_0 c_1}{\mu_2}e^{\lambda_1^2(s-t_f)} - \frac{\xi_1}{\mu_2}e^{\lambda_1^2(s-2t_f)} \tag{7}$$

elde edilir. (7) kontrol fonksiyonunun bu değeri (6) da yazılır ve düzenlenirse

$$c_1\mu_2 + c_1\underbrace{\int_0^{t_f}\xi_0 e^{2\lambda_1^2(\tau-t_f)}d\tau}_{\kappa_1} = \underbrace{\int_0^{t_f}\left(\xi_2 e^{2\lambda_1^2(\tau-t_f)} - \xi_1 e^{\lambda_1^2(2\tau-3t_f)}\right)d\tau}_{\kappa_2} \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{\kappa_2}{\mu_2+\kappa_1}$$

değeri elde edilir. Böylece kontrol fonksiyonu

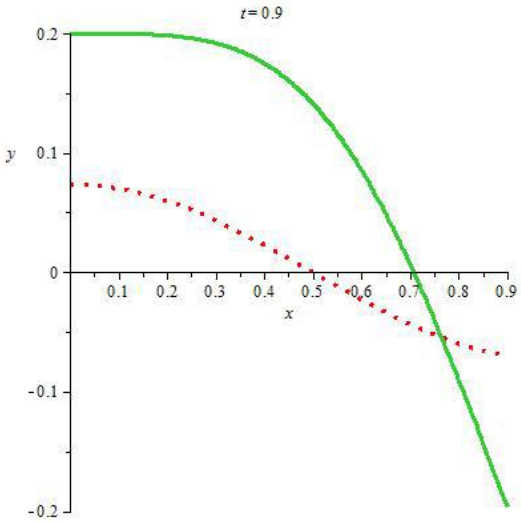
$$v(s) = \left(\frac{\xi_2}{\mu_2} - \frac{\xi_0}{\mu_2}\frac{\kappa_2}{\mu_2+\kappa_1}\right)e^{\lambda_1^2(s-t_f)} - \frac{\xi_1}{\mu_2}e^{\lambda_1^2(s-2t_f)}$$

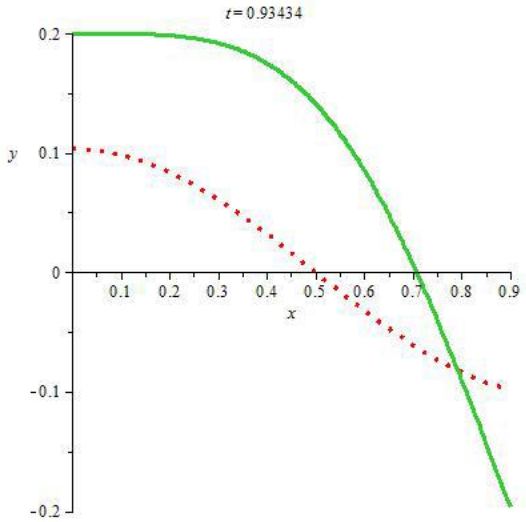
şeklinde bulunmuş olur.

Birkaç örnek verelim.

Örnek 1

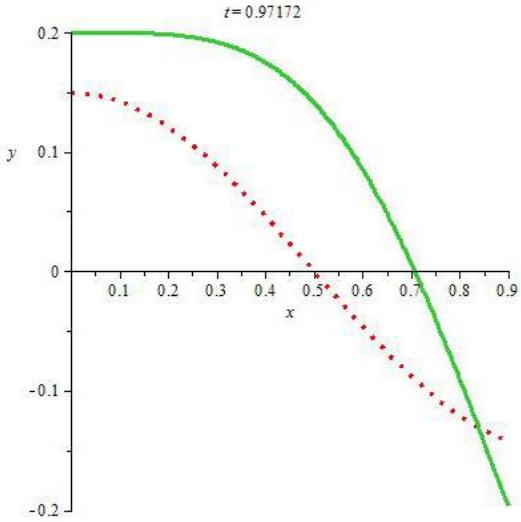
Başlangıç fonksiyonu $\psi_0(x) = \sqrt{2}\cos(\pi x),\ f(x) = \sin(x) + \cos(x),$ hedef fonksiyonu $\psi_d(x) = \frac{1}{1+x^4} - 0.8,$ ve $t_f = 1,\ \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 10^{-6}$ olsun. Buna göre aşağıdaki grafikte $t \to t_f$ için $\psi(x,t)$ nin $\psi_d(x)$ ye nasıl yaklaştığı gösterilmiştir:

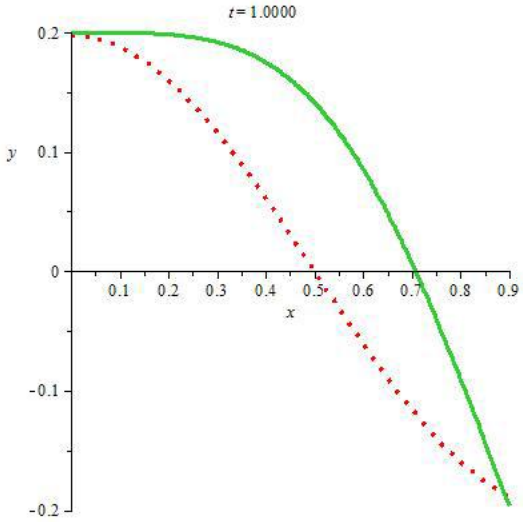


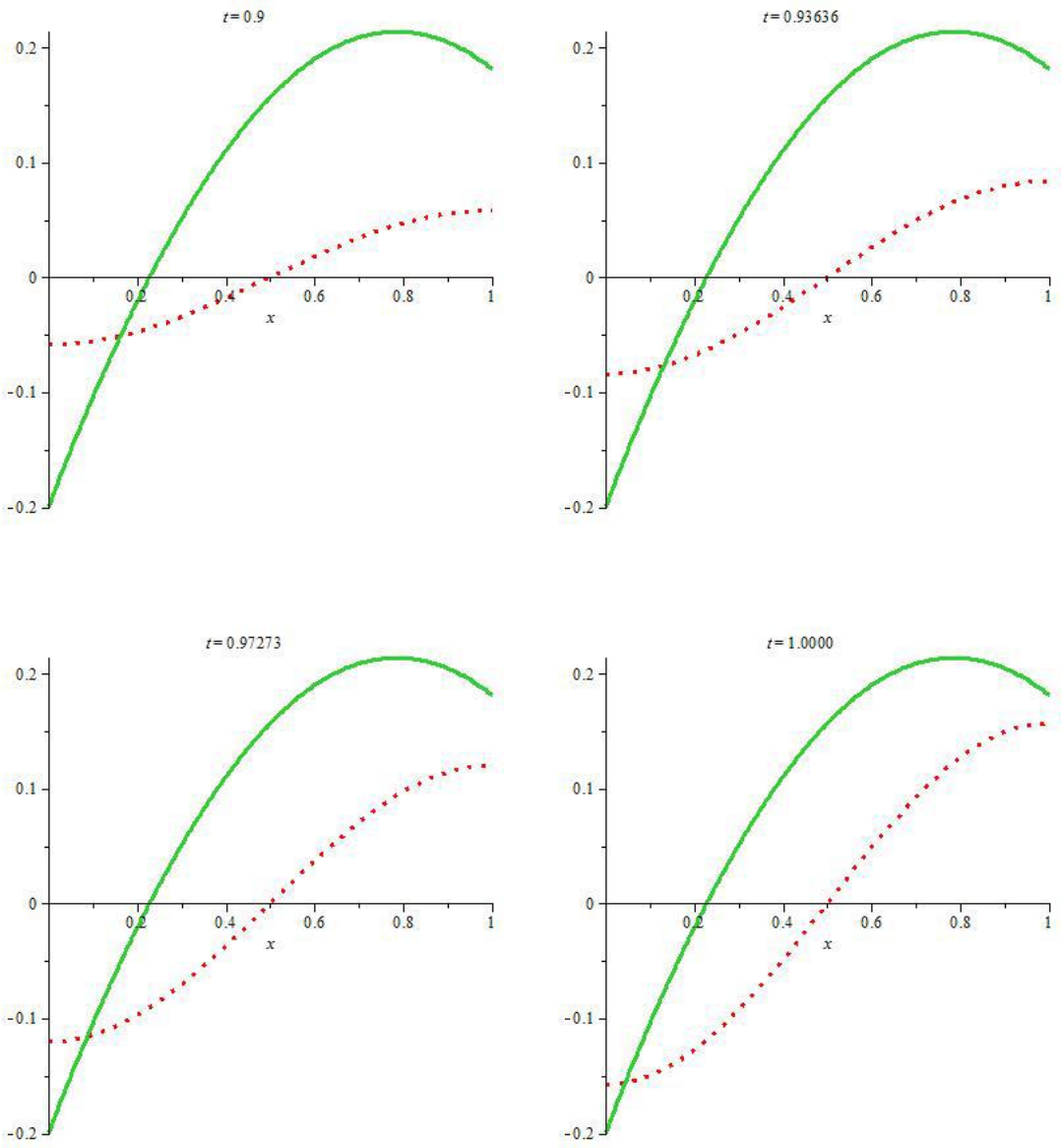


Örnek 2

Başlangıç fonksiyonu $\psi_0(x) = \sqrt{2}\cos(\pi x)$, $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, hedef fonksiyonu $\psi_d(x) = \sin(x) + \cos(x) - 1.2$, ve $t_f = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 10$ olması halinde hedef fonksiyona yaklaşımlar aşağıdaki gibidir.







Sonuç

Bu çalışmada, plazma taşınmasında ortaya çıkan bir kısmi diferansiyel denklemin optimal kontrolünün varlığı gösterilmiştir. Hedef fonksiyonunun ve parametrelerin daha uygun seçimine göre kontrolün daha iyi yaklaşım gösterdiği örnekler verilebilir. Çözüm fonksiyonu $\psi(x,t)$ deki N nin daha yüksek değerleri dikkate alındığında optimal kontrolün nasıl değiştiği gösterilebilir.

Referanslar

[1] Chao Xu, Joseph N. Dalessio, and Eugenio Schuster. Optimal control of a parabolic pde system arising in plasma transport via diffusivity-interior-boundary actuation. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2099 –2104, 2008.

[2] I. Sadek, Necessary and sufficient conditions for the optimal control of distributed parameter systems subject to integral constraints, Journal of the Franklin 325 (5) (1988) 565–583.

[3] J.M. Sloss, J.C. Bruch Jr, I.S. Sadek, A maximum principle for non-conservative self-adjoint systems, IMA Journal of Mathematical Control and Information 6 (1989) 199–216.

[4] G.-P. Cai, S.X. Yang, A discrete optimal control method for a flexible cantilever beam with time delay, Journal of Vibration and Control 12 (5) (2006) 509–526.